

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Quarto Appello — 10 luglio 2013

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
 - Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
 - Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
 - Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**
-

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n > 5$ risulta

$$n + 2^n < 3^{n-2}.$$

Esercizio 2. Si determini un'applicazione $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ che sia suriettiva ma non iniettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_6)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini la matrice inversa.

Esercizio 4. Sia $A = \{a, b, c, d, e\}$ un insieme di ordine 5. Quali sono le relazioni di equivalenza \mathcal{R} in A che soddisfano entrambe le condizioni $a\mathcal{R}b$ e $a\mathcal{R}c$?

Esercizio 5. Descrivendo brevemente il metodo utilizzato per ottenerla, si determini una soluzione dell'equazione congruenziale

$$99x \equiv 100 \pmod{1000}.$$

Esercizio 6. Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi si consideri l'operazione interna \star definita ponendo

$$a \star b = a - 2b.$$

- Si stabilisca se l'operazione \star è associativa.
- Si stabilisca se l'operazione \star è commutativa.
- Si determini l'eventuale elemento neutro della struttura algebrica (\mathbb{Z}, \star) .
- Si individui un sottoinsieme proprio **infinito** di \mathbb{Z} che sia stabile rispetto all'operazione \star .

Esercizio 7. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si considerino gli insiemi

$$\begin{aligned}A_n &= \{1, 2, 3, \dots, 6n\}, \\B_n &= \{2, 4, 6, \dots, 12n\}, \\C_n &= \{3, 6, 9, \dots, 18n\}.\end{aligned}$$

Si determini il valore di n per cui $|A_n \cup B_n \cup C_n| = 60$.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 27\}.$$

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide*.
- Si individui un sottoinsieme B di ordine 6 di A tale che $(B, |)$ sia un reticolo distributivo.
- Si individui un sottoinsieme C di ordine 5 di A tale che $(C, |)$ sia un reticolo non distributivo.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

- Si determinino tutti gli autovalori e i relativi autovettori di A su \mathbb{Q} .

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su \mathbb{Q} .

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = (A \rightarrow \neg B) \wedge (A \vee B).$$

Si scriva la tavola di verità di P .

Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi \neg e \vee .

- Si determini una formula ben formata equivalente a Q :

A	B	C	Q
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0