Cognome ____________________ Nome ____________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Quarto appello — 9 luglio 2014

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**

☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 100$ risulta

$$\sum_{k=100}^{n} k = \frac{n^2 + n - 9900}{2}.$$

Esercizio 2. Si determinino le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 21x \equiv 11 \pmod{12} \\ 20x \equiv 18 \pmod{14}. \end{cases}$$

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ è pari,} \\ 1 + x & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Considerata l'applicazione $g : t \in \mathbb{N} \longmapsto t + 1 \in \mathbb{N}$, si determini la composta $f \circ g$.

Esercizio 4. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{Z}_5).$$

Esercizio 5. Quante sono, nell'insieme $\mathbb{N}_0$ dei numeri naturali, le relazioni di equivalenza $\mathcal{R}$ tali che $[0]_\mathcal{R} = \{0, 1, 2\}$ e $[1]_\mathcal{R} = \{0, 1, 3\}$? Perché ?

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali positivi di cinque cifre, di cui esattamente due sono 0.

Esercizio 7. Nel sottoinsieme

$$T = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,3), (4,4)\}$$

di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la relazione d'ordine $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \iff a|c \text{ e } b \leq d,$$

dove $\leq$ e $|$ denotano rispettivamente le relazioni d'ordine *usuale* e del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(T, \sqsubseteq)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(T, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali di $(T, \sqsubseteq)$.

- Si individui un sottoinsieme di T che sia un reticolo non distributivo.

Esercizio 8.

- Si determini il gruppo $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{24})$ degli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_{24}, \cdot)$.

- Si determini un sottogruppo di $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{24}), \cdot)$ avente ordine 2.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{24})$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}_{24}, +)$.

Esercizio 9. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$, e l'applicazione

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (x_1 + x_3, x_2 - x_4, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo K di f.

- Si determinino la dimensione di K e una sua base.

Esercizio 10. Avvalendosi del Teorema di Rouché-Capelli, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y + z + 4t = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale sia data la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

e siano dati i punti

$$C = (2, 0, 3), \qquad D = (0, -2, -3).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r' per i punti C e D.

- Si verifichi se le rette r e r' sono parallele, incidenti o sghembe.

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = \neg(D \wedge C) \ \rightarrow \ \neg C.$$

Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è soddisfacibile.

Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\vee$.

- Si determini una formula in forma normale disgiuntiva equivalente a:

$$Q = \neg A \ \rightarrow (B \wedge C).$$