Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA

DOCENTE: C. DELIZIA

Quarto appello — 10 luglio 2015

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni numero naturale $n \geq 1$ risulta

$$1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Z}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ f$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{Z}_2).$$

Esercizio 4. Si determini la minima soluzione positiva dell'equazione congruenziale

$$276\,x \equiv 21 \pmod{999}.$$

Esercizio 5. Si consideri l'insieme $A = \{1, 2, 3\}$. Nell'insieme $B = A \times A$ si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$(a, b)\,\mathcal{R}\,(c, d) \iff \{a, b\} = \{c, d\}.$$

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in B.

- Si determinino le seguenti classi di equivalenza:

  $[(1, 2)]_{\mathcal{R}} =$

  $[(1, 1)]_{\mathcal{R}} =$

- Si determini la partizione di B individuata da $\mathcal{R}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si calcoli quanti sono i numeri naturali positivi ≤ 500 divisibili per almeno uno tra 6, 10 e 15.

Esercizio 7. Sia $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12\}$, e si consideri l'insieme ordinato $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del divide tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse dell'insieme ordinato $(A, |)$.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(A, |)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è un reticolo.

Esercizio 8. Si consideri il monoide $(\mathbb{Z}_{15}, \cdot)$.

- Si determini il gruppo $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$ degli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_{15}, \cdot)$.

- Compilandone la tabella moltiplicativa, si dimostri che il sottoinsieme $A = \{1, 2, 4, 8\}$ è un sottogruppo di $(U(\mathbb{Z}_{15}), \cdot)$.

- Si determini un sottogruppo di ordine 2 di A.

Esercizio 9. Si determini, se esiste, una matrice $A \in M_3(\mathbb{Z}_7)$ che abbia autovalori 1, 2 e 3, e corrispondenti autovettori $(0, 1, 3)$, $(1, 5, 6)$ e $(0, 1, 2)$.

Esercizio 10. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} x + 2t = 1 \\ 2y + t = 1 \\ x + z + t = 4 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (1, 2, 0), \qquad B = (2, 3, 0), \qquad C = (1, 0, 1).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non sono allineati.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + \alpha' + \beta' \\ y = 1 - 2\beta' \\ z = 3\alpha' - \beta' \end{cases}$$

  con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.

Esercizio 12. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^5$, e l'applicazione

$$f : (x_1 \, , \, x_2 \, , \, x_3 \, , \, x_4) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (x_1 - x_3 \, , \, x_4 \, , \, x_2 - x_1 + x_3 \, , \, 0 \, , \, x_1 - x_2) \in \mathbb{R}^5 .$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo di f e la sua dimensione.

- Si determini l'immagine di f e la sua dimensione.