Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

MATEMATICA DISCRETA

Docente: C. Delizia

Quarto appello — 7 luglio 2016

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**

☐ Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 3$ risulta

$$\sum_{k=3}^{n} 2k = n^2 + n - 6.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{N}_0$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si dimostri che f è invertibile, e se ne determini l'applicazione inversa f^{-1}.

Esercizio 3. Utilizzando il teorema degli orlati, si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}_7).$$

Esercizio 4. Si determini la minima soluzione positiva dell'equazione congruenziale

$$70x \equiv 36 \pmod{198}.$$

Esercizio 5. Per ogni $a \in \mathbb{Z}$, si denoti con $\pi(a)$ l'insieme dei divisori primi di a. Nell'insieme

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$$

dei numeri interi positivi ≤ 20 si consideri poi la relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$a\,\mathcal{R}\,b \iff \pi(a) = \pi(b).$$

Si determini la partizione di A individuata da $\mathcal{R}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali di 7 cifre di cui esattamente 2 zero, 2 uno e 2 due.

Esercizio 7. Sia $(A, \subseteq)$ un insieme ordinato.

- Si dimostri che il massimo di A, se esiste, è unico.

- Si dimostri che se A possiede 2 elementi massimali allora non ha massimo.

- Con $B \subseteq A$, si dia la definizione di estremo superiore di B in A.

- Si dimostri che se A è totalmente ordinato allora esso è un reticolo.

Esercizio 8. Si considerino l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e l'operazione binaria $\perp$ definita in A ponendo

$$a \perp b = b,$$

per ogni $a, b \in A$.

- Si dimostri che la struttura algebrica $(A, \perp)$ è un semigruppo non commutativo.

- Si stabilisca se la struttura algebrica $(A, \perp)$ è un monoide.

- Si determini un sottosemigruppo commutativo di $(A, \perp)$ avente ordine massimo.

Esercizio 9. Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7)$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_5$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c + 4d = 0 \\ 2a + 3b + 4c + d = 1 \\ 3a + 4b + c + 2d = 2 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nel piano affine si considerino la retta r di equazione cartesiana $3x + 2y + 7 = 0$, e la retta s di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 3t, \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si stabilisca se r ed s sono parallele o incidenti, e in quest'ultimo caso si determinino le coordinate del punto di intersezione.

Esercizio 12. Si considerino gli spazi vettoriali reali $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^4$, e l'applicazione

$$f : (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (a + b, c - 2d) \in \mathbb{R}^2.$$

- Si dimostri che f è un'applicazione lineare.

- Si determini il nucleo di f e la sua dimensione.

- Si determini l'immagine di f e la sua dimensione.