Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ____________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Proff. F. Bottacin, C. Delizia

Sesto Appello — 10 settembre 2009

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e fare **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Mat. Discreta e Logica Matem. (12 cfu) — Esercizi: **tutti**

☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**

☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**

☐ Matematica Discreta vecchio ordinamento (9 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**

Esercizio 1. (a) Si scriva la tavola di verità della seguente formula ben formata e si determini se essa è una tautologia:

$$P = \neg((A \wedge \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \vee B))).$$

(b) Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

(c) Si scriva una formula ben formata Q che abbia la seguente tavola di verità:

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Esercizio 2. Si determinino una formula in forma normale congiuntiva ed una in forma normale disgiuntiva equivalenti alla seguente formula ben formata:

$$(A \wedge \neg B \wedge C \to (A \to B \wedge C)) \wedge (A \to B).$$

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$(\forall x\, A(x) \to \neg\exists x\, B(x)) \to (\exists y\, A(y) \to \forall y\, B(y)).$$

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2x \equiv 4 \pmod 5 \\ 3x \equiv 5 \pmod{11} \\ 4x \equiv 2 \pmod 6 \\ |x| \leq 250. \end{cases}$$

Esercizio 5. Quante sono le applicazioni non iniettive di $\mathbb{Z}_5$ in $\mathbb{Z}_8$? (*giustificare la risposta*)

Esercizio 6. Si consideri l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{Q} \longmapsto \frac{3x-2}{5} \in \mathbb{Q}.$$

- Si calcoli:

  $f(5\mathbb{N}) =$

  $f^{-1}(\{1,2,3\}) =$

- Si dimostri che f è biettiva.

- Si determini l'applicazione inversa f^{-1}.

- Considerata l'applicazione $g : t \in \mathbb{Q} \longmapsto |5t| \in \mathbb{Q}$, si determini la composta $g \circ f$.

Esercizio 7. Si consideri, nell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, l'operazione binaria $\star$ definita ponendo

$$a \star b = a + b - \frac{1}{3}$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Q}$.

- Si provi che la struttura algebrica $(\mathbb{Q}, \star)$ è un gruppo abeliano.

- Qual è l'elemento neutro di $(\mathbb{Q}, \star)$?

- Se $a \in \mathbb{Q}$, qual è il simmetrico di a in $(\mathbb{Q}, \star)$?

- Si stabilisca se il sottoinsieme $\mathbb{Z}$ è stabile in $(\mathbb{Q}, \star)$, motivando la risposta.

- Motivando la risposta, si stabilisca se l'applicazione

$$f : a \in \mathbb{Q} \longmapsto \frac{a+1}{3} \in \mathbb{Q}$$

è un omomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{Q}, +)$ e $(\mathbb{Q}, \star)$.

Esercizio 8. Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei numeri primi in $\mathbb{N}$, e si consideri l'insieme

$$W = \{p_1 p_2 : p_1, p_2 \in \mathbb{P}, p_1 \leq p_2\}.$$

- Si spieghi per quale motivo non è d'ordine la relazione $\preceq$ definita in W ponendo:

$$p_1 p_2 \preceq q_1 q_2 :\Longleftrightarrow \; p_2 = q_2.$$

- Si verifichi che è d'ordine la relazione $\sqsubseteq$ definita in W ponendo:

$$p_1 p_2 \sqsubseteq q_1 q_2 :\Longleftrightarrow \; (p_1 \leq q_1) \text{ e } (p_2 = q_2),$$

  dove il $\leq$ indica la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

- Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.

- Si determinino, se esistono, $\min W$, $\max W$, tutti gli elementi minimali e tutti gli elementi massimali di $(W, \sqsubseteq)$.

- Considerati i sottoinsiemi $F = \{21, 26, 55, 121\}$ e $G = \{15, 21, 35, 49\}$ di W, si disegni il diagramma di Hasse degli insiemi ordinati $(F, \sqsubseteq)$ e $(G, \sqsubseteq)$.

Esercizio 9. Si stabilisca se la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

è invertibile, ed in tal caso se ne determini la matrice inversa.

Esercizio 10. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7).$$

- Si determinino tutti gli autovalori e gli autovettori di A.

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile.

Esercizio 11. Si stabilisca se i tre vettori

$$v_1 = (1, 2, 0), \qquad v_2 = (0, 2, -2), \qquad v_3 = (2, 3, 1)$$

formano una base di $\mathbb{R}^3$. In caso contrario si esprima uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio 12. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (1, -1, 2), \qquad B = (0, 3, -1), \qquad C = (-2, 0, -7).$$

- Si verifichi che i punti A, B e C non appartengono alla stessa retta.

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B e C.

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 1 + 4\alpha - 11\beta \\ z = 3 - 3\alpha \end{cases}$$

  e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.