

Cognome _____ Nome _____ Matricola _____

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

Sesto Appello — 13 settembre 2010

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
 - Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9**
 - Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3**
 - Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12**
-

Esercizio 1.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = (A \rightarrow A \vee \neg B) \wedge B.$$

Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è una contraddizione.

Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi \neg e \vee .

- Si stabilisca se le formule ben formate $A \wedge \neg A$ e $A \rightarrow \neg A$ sono equivalenti.

Esercizio 2. Si determini una formula in forma normale congiuntiva con la stessa tavola di verità di Q :

A	B	C	Q
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Esercizio 3. Si determini una forma normale prenessa della seguente formula ben formata:

$$R = A(x) \rightarrow \forall y B(y) \vee \exists x A(x).$$

Esercizio 4.

- Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 8 costituita da 5 cifre, due delle quali sono 0 ?

- Si determini il più piccolo di essi, e lo si rappresenti in base 10.

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri interi $a = 198$ e $b = 862$, e si individuino due interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

Esercizio 6. Si consideri l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{3 - 2x}{7} \in \mathbb{Q}.$$

- Si dimostri che f è biettiva.

- Si determini l'applicazione inversa f^{-1} .

Si consideri l'applicazione

$$g : t \in \mathbb{Q} \mapsto |7t| \in \mathbb{Q}.$$

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Si stabilisca se l'applicazione $g \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 7. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ dei numeri naturali compresi tra 1 e 10 si consideri la relazione \sqsubseteq definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 2a < b.$$

- Si verifichi che \sqsubseteq è una relazione d'ordine in A .
- Si disegni il diagramma di Hasse di (A, \sqsubseteq) .
- Si stabilisca se (A, \sqsubseteq) è ben ordinato.
- Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di (A, \sqsubseteq) .
- Si determini l'eventuale estremo inferiore in A del sottoinsieme $\{3, 4\}$.
- Si determini l'eventuale estremo superiore in A del sottoinsieme $\{3, 4\}$.
- Si stabilisca se (A, \sqsubseteq) è un reticolo.

Esercizio 8. Nell'insieme \mathbb{Z} dei numeri interi si consideri l'operazione interna \star definita ponendo

$$a \star b = a + b - |ab|.$$

- Si provi che l'operazione \star è commutativa.
- Esibendo un controesempio, si provi che l'operazione \star non è associativa.
- Si determini l'elemento neutro della struttura (\mathbb{Z}, \star) .
- Si stabilisca se l'elemento 2 è simmetrizzabile in (\mathbb{Z}, \star) .
- Motivando la risposta, si stabilisca se l'insieme $-2\mathbb{N} = \{\dots, -8, -6, -4, -2\}$ dei numeri interi negativi pari è un sottoinsieme stabile di (\mathbb{Z}, \star) .

Esercizio 9. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_6)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 10. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

- Si determinino tutti gli autovalori e i relativi autovettori di A su \mathbb{Q} .

- Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su \mathbb{Q} .

Esercizio 11. Si stabilisca se i tre vettori

$$v_1 = (1, 1), \quad v_2 = (0, 1), \quad v_3 = (-2, 0)$$

sono linearmente indipendenti in \mathbb{R}^2 . Altrimenti si esprima uno di essi come combinazione lineare degli altri due.

Esercizio 12. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti non allineati

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (-1, 0, 1), \quad C = (2, 1, 0).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche del piano π per i punti A, B, C .

- Si consideri il piano π' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \alpha' - \beta' \\ y = 2 + \beta' \\ z = 1 + \alpha' + \beta' \end{cases}$$

con $\alpha', \beta' \in \mathbb{R}$, e si stabilisca se i piani π e π' sono paralleli.