

Cognome \_\_\_\_\_ Nome \_\_\_\_\_ Matricola \_\_\_\_\_

## MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

DOCENTI: C. DELIZIA, M. TOTA

**Sesto Appello — 15 settembre 2011**

---

**IMPORTANTE:** indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
  - Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
  - Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
  - Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**
- 

**Esercizio 1.** Si consideri l'insieme

$$A = \{\emptyset, \{a\}, b\}.$$

Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme  $\mathcal{P}(A)$  delle parti di  $A$  ?

**Esercizio 2.** Si consideri l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{Z} \mapsto \frac{2x - 3}{5} \in \mathbb{Q}$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se  $f$  è iniettiva.
- Motivando la risposta, si stabilisca se  $f$  è suriettiva.
- Si determini la controimmagine  $f^{-1}(\{0, 1\})$ .
- Si determini la controimmagine  $f^{-1}(\mathbb{Z})$ .
- Considerata l'applicazione  $g : y \in \mathbb{Q} \mapsto 10y \in \mathbb{Q}$ , si determini l'applicazione composta  $g \circ f$ .
- Motivando la risposta, si stabilisca se  $g \circ f$  è iniettiva.

**Esercizio 3.** Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5).$$

**Esercizio 4.** Si determinino tutte le soluzioni intere dell'equazione congruenziale

$$119x \equiv 78 \pmod{153}.$$

**Esercizio 5.** Nell'insieme  $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$  dei numeri naturali compresi tra 1 e 10 si consideri la relazione  $\mathcal{R}$  definita in  $A$  ponendo

$$a \mathcal{R} b \iff a + 3b \text{ è pari.}$$

- Si dimostri che  $\mathcal{R}$  è una relazione di equivalenza in  $A$ .

- Si determini la partizione di  $A$  individuata da  $\mathcal{R}$ .

**Esercizio 6.** Descrivendo il procedimento utilizzato, si stabilisca quanti sono i numeri interi positivi minori di 301 e divisibili per 5 o per 6, ma non per 10.



**Esercizio 9.** Si determini una matrice  $A \in M_2(\mathbb{Z}_3)$  avente autovalori  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$ , e relativi autovettori  $v_1 = (1, 0)$  e  $v_2 = (2, 2)$ .

**Esercizio 10.** Si consideri lo spazio vettoriale reale  $\mathbb{R}^4$ .

- Si dimostri che il sottoinsieme  $V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 0, b + c = -d\}$  è un sottospazio di  $\mathbb{R}^4$ .

- Si determinino la dimensione di  $V$  e una sua base.

**Esercizio 11.** Nello spazio affine bidimensionale siano assegnati i punti

$$A = (2, 2), \quad B = (1, 0), \quad C = (-1, -1), \quad D = (1, 1).$$

- Si determinino le equazioni parametriche della retta  $r$  passante per i punti  $A$  e  $B$  e della retta  $s$  passante per i punti  $C$  e  $D$ .

- Si stabilisca se  $r$  e  $s$  sono parallele o incidenti e, in quest'ultimo caso, si determinino le coordinate del punto d'intersezione.

**Esercizio 12.**

- Si consideri la formula ben formata

$$P = A \wedge B \vee (A \rightarrow \neg B).$$

Si scriva la tavola di verità di  $P$  e si stabilisca, giustificando la risposta, se  $P$  è soddisfacibile.

Si scriva una formula equivalente a  $P$  usando solo i connettivi  $\neg$  e  $\vee$ .

- Si determini una formula in forma normale disgiuntiva equivalente a:

$$Q = A \rightarrow B \wedge C.$$