Cognome ______________________ Nome ______________________ Matricola ______________

MATEMATICA DISCRETA E LOGICA MATEMATICA

Docenti: C. Delizia, M. Tota

Quinto appello — 16 settembre 2014

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

☐ Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
☐ Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
☐ Logica Matematica (3 cfu) — Esercizi: **solo il numero 12**
☐ Vecchio ordinamento o integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n \geq 0$ il numero $n^2 + n$ è pari.

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{Q} \longmapsto \frac{3x+1}{2} \in \mathbb{Q}.$$

- Si dimostri che f è biettiva.

- Si determini l'applicazione inversa f^{-1}.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ f$.

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Z}_3).$$

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere dell'equazione congruenziale

$$195x \equiv 132 \pmod{208}.$$

Esercizio 5. Nell'insieme $\mathbb{N}_p$ dei numeri naturali pari si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$a \mathcal{R} b \iff 4 \text{ divide } a + b.$$

- Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{N}_p$.

- Si determini la partizione di $\mathbb{N}_p$ individuata da $\mathcal{R}$.

Esercizio 6. Quanti sono i numeri naturali che si possono ottenere permutando le cifre del numero 5331100 ?

Esercizio 7. Si consideri l'insieme W costituito dai numeri naturali della forma $3^n 5^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$:

$$W = \{3^n 5^m : n, m \in \mathbb{N}\}.$$

- Si verifichi che è d'ordine la relazione $\sqsubseteq$ definita in W ponendo:

$$3^n 5^m \sqsubseteq 3^s 5^t :\iff (n = s) \text{ e } (m \leq t),$$

  dove $\leq$ indica la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

- Si stabilisca se l'insieme ordinato $(W, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato e se è ben ordinato.

- Si determinino, se esistono, $\min W$, $\max W$, tutti gli elementi minimali e tutti gli elementi massimali di $(W, \sqsubseteq)$.

- Si consideri il sottoinsieme

$$F = \{3^n 5^m : 1 \leq n, m \leq 3\}$$

  di W. Si disegni il diagramma di Hasse dell' insieme ordinato $(F, \sqsubseteq)$.

Esercizio 8. Si consideri la struttura algebrica $(\mathbb{Z}_4, \star)$, dove l'operazione interna $\star$ è definita ponendo

$$a \star b = a + b - ab,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}_4$.

- Si dimostri che $(\mathbb{Z}_4, \star)$ è un monoide commutativo.

- Si compili la tabella moltiplicativa di $(\mathbb{Z}_4, \star)$.

- Si determinino tutti gli elementi simmetrizzabili di $(\mathbb{Z}_4, \star)$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

Motivando la risposta, si stabilisca se A è diagonalizzabile su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 10. Applicando il metodo di Gauss-Jordan, si risolva il seguente sistema lineare su $\mathbb{Z}_5$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \\ x + z = 0 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine bidimensionale siano dati i punti

$$A = (3, 4), \qquad B = (-2, -3).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r per i punti A, B.

- Si scriva l'equazione cartesiana della retta r' per i punti $C = (-6, -1)$, $D = (2, 5)$.

- Si stabilisca se le due rette r e r' sono parallele.

Esercizio 12.

- Si consideri la formula ben formata

$$P = (A \to B) \to \neg B \vee A.$$

  Si scriva la tavola di verità di P e si stabilisca, giustificando la risposta, se P è una contraddizione.

  Si scriva una formula equivalente a P usando solo i connettivi $\neg$ e $\wedge$.

- Si determini una formula in forma normale congiuntiva equivalente a Q:

A	B	C	Q
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0