

MATEMATICA DISCRETA

DOCENTE: C. DELIZIA

Quinto appello — 16 settembre 2015

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**
- Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
- Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
- Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Dimostrare che, con A , B e C insiemi arbitrari, risulta

$$A \cap B = \emptyset \implies (C \setminus A) \cup (C \setminus B) = C.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ definita ponendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \text{ è pari} \\ 3x - 2 & \text{se } x \text{ è dispari.} \end{cases}$$

- Motivando la risposta, si stabilisca se f è iniettiva.
- Motivando la risposta, si stabilisca se f è suriettiva.
- Si determini l'applicazione composta $f \circ f$.
- Motivando la risposta, si stabilisca se $f \circ f$ è iniettiva.

Esercizio 3. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)$$

è invertibile, e in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema:

$$\begin{cases} 22x \equiv 34 \pmod{54} \\ 7x \equiv 9 \pmod{10} \\ 6x \equiv 5 \pmod{7} \\ |x| \leq 2000 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ si determinino tutte le relazioni di equivalenza \mathcal{R} che verificano le seguenti condizioni:

- $1 \mathcal{R} 2$
- $3 \mathcal{R} 2$
- $4 \notin [5]_{\mathcal{R}}$.

Esercizio 6. Descrivendo il procedimento utilizzato per fornire la risposta, si stabilisca quanti sono i numeri naturali **dispari** di sei cifre di cui esattamente tre sono 0.

Esercizio 7. Sia $A = \{1, 2, 3, 6, 14, 21, 42\}$, e si consideri l'insieme ordinato $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è totalmente ordinato.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è un reticolo.

Esercizio 8. Sia $A = 3\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi multipli di 3. Si consideri l'operazione \star definita ponendo, per ogni $a, b \in A$,

$$a \star b = \frac{ab}{3}.$$

- Si dimostri che la struttura algebrica (A, \star) è un monoide commutativo.

- Si determini il gruppo degli elementi invertibili del monoide (A, \star) .

- Si stabilisca se l'insieme $3\mathbb{N}$ dei multipli positivi di 3 è un sottomonoide di (A, \star) .

Esercizio 9. Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q})$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema lineare su \mathbb{Z}_5 :

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Esercizio 11. Nello spazio affine tridimensionale siano dati i punti

$$A = (2, 1, 2), \quad B = (2, -1, 4).$$

- Si scrivano le equazioni parametriche della retta r per i punti A e B .

- Si consideri la retta r' di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 2 - t' \\ z = 2t' \end{cases}$$

con $t' \in \mathbb{R}$ e si stabilisca se le rette r e r' sono parallele, incidenti o sghembe.

