

MATEMATICA DISCRETA

DOCENTE: C. DELIZIA

Quinto appello — 14 settembre 2016

IMPORTANTE: indicare l'esame che si intende sostenere e svolgere **solo** gli esercizi corrispondenti (eventuali altri esercizi **non saranno considerati**).

- Matematica Discreta (9 cfu) — Esercizi: **tutti**
- Matematica Discreta e Logica Matematica (12 cfu) — Esercizi: **tutti**
- Matematica Discreta (6 cfu) — Esercizi: **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8**
- Integrazione di esami già sostenuti — **Chiedere al docente**

Esercizio 1. Utilizzando il principio di induzione si dimostri che per ogni $n > 2$ risulta

$$\sum_{k=3}^n (2k - 1) = n^2 - 4$$

Esercizio 3. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{Z}_{11}).$$

Esercizio 4. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 16x \equiv 14 \pmod{18} \\ 6x \equiv 8 \pmod{10} \\ 5x \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$$

Esercizio 5. Nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si determinino tutte le relazioni di equivalenza \mathcal{R} che verificano simultaneamente le seguenti condizioni:

- $2 \mathcal{R} 3$
- $4 \mathcal{R} 2$
- $[1]_{\mathcal{R}} \neq [2]_{\mathcal{R}}$
- $[1]_{\mathcal{R}} \neq [6]_{\mathcal{R}}$
- $|A/\mathcal{R}| = 2.$

Esercizio 6. Al termine della sessione estiva di esami, la situazione degli studenti immatricolati al corso di laurea in Informatica nell'anno accademico 2015/16 è la seguente:

- 141 studenti hanno superato l'esame di Matematica Discreta;
- 130 studenti hanno superato l'esame di Programmazione;
- 156 studenti hanno superato l'esame di Architettura;
- 139 studenti non hanno superato nessuno di questi tre esami;
- 28 studenti hanno superato tutti e tre questi esami;
- 65 studenti hanno superato l'esame di Matematica Discreta e quello di Programmazione;
- 77 studenti hanno superato l'esame di Matematica Discreta e quello di Architettura;
- 52 studenti hanno superato l'esame di Programmazione e quello di Architettura.

Quanti erano gli studenti immatricolati?

Esercizio 7. Sia $A = \{2, 3, 5, 6, 8, 15, 20, 24, 40, 60\}$, e si consideri l'insieme ordinato $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è totalmente ordinato.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali, massimali, minimo e massimo di $(A, |)$.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è un reticolo.

Esercizio 9. Motivando la risposta, si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 10. Si determinino tutte le soluzioni del seguente sistema lineare su \mathbb{Z}_7 , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 2a + 4b + 3c = 0 \\ 2b + d = 1 \\ a + c + 4d = 2 \end{cases}$$

Esercizio 12. Nello spazio vettoriale reale \mathbb{R}^3 si considerino i vettori

$$u = (1, 2, -1), \quad v = (2, 4, 4), \quad w = (3, 6, 7)$$

e il sottospazio $L = \langle u, v, w \rangle$ generato da u , v e w .

- Si determini una base e la dimensione di L .

- Con $z = (2, 3, 0)$, si stabilisca se $z \in L$.