MATEMATICA DISCRETA
Gruppo 1
Seconda prova in itinere
30 gennaio 2002

<u>**Esercizio 1.**</u> Si considerino i numeri interi $a = 2717$, $b = 2431$.

• Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si calcoli il massimo comun divisore positivo (a, b).

• Si esprima (a, b) nella forma $(a, b) = \alpha a + \beta b$, con α, $\beta \in \mathbb{Z}$.

• Si calcoli il minimo comune multiplo positivo $[a, b]$.

<u>**Esercizio 2.**</u> Si determini l'unico numero naturale a compreso tra 520 e 750 tale che simultaneamente si abbia $a \equiv 5 \pmod{11}$ e $a \equiv 7 \pmod{12}$.

<u>**Esercizio 3.**</u> Si eseguano i seguenti calcoli modulo 13, esprimendo il risultato con un numero non negativo minore di 13:
$11 + 7 =$ $\quad$ $3 - 7 =$ $\quad$ $12 \cdot 6 =$ $\quad$ $10 : 7 =$

<u>**Esercizio 4.**</u> Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false, motivando le risposte.

• Nell'anello $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$ l'elemento 15 è invertibile.

• Nell'anello $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$ l'elemento 15 è divisore dello zero.

<u>**Esercizio 5.**</u> Si consideri l'insieme S costituito dai numeri naturali della forma $2^a 3^b$, con a, $b \in \mathbb{N}$:
$$S = \{2^a 3^b : a, b \in \mathbb{N}\}.$$

• Si dimostri che S è una parte stabile di $(\mathbb{N}, \cdot)$, dove $\cdot$ denota l'usuale prodotto in $\mathbb{N}$.

• Si verifichi che la relazione R definita in S ponendo
$$2^a 3^b \; R \; 2^c 3^d \;\Leftrightarrow\; a + b = c + d$$
è di equivalenza.

• Si determinino le seguenti classi di equivalenza:
$[1]_R =$ $\quad$ $[2]_R =$ $\quad$ $[3]_R =$
$[4]_R =$ $\quad$ $[12]_R =$

• Si verifichi che la relazione R è compatibile con il prodotto in $\mathbb{N}$, e che quindi la posizione $[2^a 3^b]_R \cdot [2^c 3^d]_R = [2^{a+c} 3^{b+d}]_R$ definisce un'operazione binaria nell'insieme quoziente S/R.

• Si dimostri che $(S/R, \cdot)$ è un monoide commutativo.

• Si provi che l'applicazione $f : [2^a 3^b]_R \in S/R \mapsto a + b \in \mathbb{N}$ è ben posta.

• Si verifichi che f è un omomorfismo di monoidi di $(S/R, \cdot)$ in $(\mathbb{N}, +)$, dove $+$ denota la usuale somma in $\mathbb{N}$.

• Si definisca in S una relazione $\underline{R}$ ponendo
$$2^a 3^b \; \underline{R} \; 2^c 3^d \;\Leftrightarrow\; a + c = b + d.$$
Perchè $\underline{R}$ non è una relazione di equivalenza?

<u>**Esercizio 6.**</u> Si consideri l'insieme S costituito dai numeri naturali della forma $2^a 3^b$, con a, $b \in \mathbb{N}$:
$$S = \{2^a 3^b : a, b \in \mathbb{N}\}.$$

• Si verifichi che la relazione $\sqsubseteq$ definita in S ponendo
$$2^a 3^b \sqsubseteq 2^c 3^d \quad \Leftrightarrow \quad a \leq c \quad \text{e} \quad b \leq d,$$
dove $\leq$ denota l'ordine usuale in $\mathbb{N}$, è una relazione d'ordine.

• Si stabilisca se l'insieme ordinato $(S, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, se è ben ordinato, quali sono gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo.

• Si dimostri che $(S, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

• Si dimostri che l'applicazione $h : 2^a 3^b \in S \mapsto a + b \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di insiemi ordinati di $(S, \sqsubseteq)$ in $(\mathbb{N}, \leq)$.

• Si dimostri che h non è un omomorfismo reticoli di $(S, \sqsubseteq)$ in $(\mathbb{N}, \leq)$.

• Si consideri il sottoinsieme $F = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 16, 18, 27\}$ di S, con l'ordine indotto da $\sqsubseteq$. Si disegni il diagramma di Hasse di $(F, \sqsubseteq)$, e si precisi perchè $(F, \sqsubseteq)$ non è un sottoreticolo di $(S, \sqsubseteq)$.

• Nel reticolo $(S, \sqsubseteq)$ si effettuino i seguenti calcoli:
$4 \wedge 6 =$ $\qquad$ $12 \wedge 18 =$ $\qquad$ $4 \vee 6 =$ $\qquad$ $6 \vee 9 =$

Esercizio 7. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{Z}_3)$$

è invertibile, motivando la risposta.

Esercizio 8. Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$

Si dimostri per induzione su n che $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{3n}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 9. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Q}$:

$$\begin{cases} -x + 4y + 5z = 2 \\ -2x + z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

Esercizio 10. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ 4x + y = 4 \end{cases}$$