MATEMATICA DISCRETA

GRUPPO 1

6 febbraio 2002

Esercizio 1. Siano A, B e C insiemi. Si dimostri che $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Esercizio 2. Si dica se la corrispondenza $\{(x, y) : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Q}, x = y^2\}$ è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$, motivando la risposta.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ l'applicazione definita dalla posizione $f(n) = \frac{3}{2}n + 1$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

• Si stabilisca se f è iniettiva, suriettiva, biettiva.

• Calcolare:

$f(\mathbb{N}) =$

$f(\mathbb{Z}) =$

$f(\mathbb{N}_p) =$

$f^{-1}(\{7\}) =$

$f^{-1}(\{2, 4\}) =$

Esercizio 4. Si consideri l'insieme S costituito dai numeri naturali della forma $2^a 3^b$, con a, $b \in \mathbb{N}$:

$$S = \{2^a 3^b : a, b \in \mathbb{N}\}.$$

• Si dimostri che S è una parte stabile di $(\mathbb{N}, \cdot)$, dove $\cdot$ denota l'usuale prodotto in $\mathbb{N}$.

• Si verifichi che la relazione R definita in S ponendo

$$2^a 3^b \; R \; 2^c 3^d \Leftrightarrow a = c \text{ e } b + d \in 2\mathbb{N}$$

è di equivalenza.

• Si descriva la generica classe di equivalenza $[2^a 3^b]_R =$, ed in particolare $[1]_R =$ $[2]_R =$ $[3]_R =$

• Si provi che la relazione R è compatibile con il prodotto in $\mathbb{N}$, e che quindi la posizione $[2^a 3^b]_R \cdot [2^c 3^d]_R = [2^{a+c} 3^{b+d}]_R$ definisce un'operazione binaria nell'insieme quoziente S/R.

• Dimostrare che $(S/R, \cdot)$ è un monoide commutativo.

• Quali sono gli elementi invertibili del monoide $(S/R, \cdot)$?

• Si provi che l'applicazione $f : [2^a 3^b]_R \in S/R \mapsto (-1)^b a \in \mathbb{Z}$ è ben posta.

• Si provi che f è biettiva.

• Si verifichi che f non è un omomorfismo di monoidi di $(S/R, \cdot)$ in $(\mathbb{Z}, +)$, dove $+$ denota la usuale somma in $\mathbb{Z}$.

Esercizio 5. Si consideri il sottoinsieme $T = \{2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$ di $(\mathbb{N}, |)$, dove $|$ è la relazione del *divide*, e T è ordinato con l'ordine indotto.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(T, |)$.

• Si stabilisca se T è un sottoreticolo di $(\mathbb{N}, |)$, e perchè.

• Si stabilisca se l'insieme ordinato $(T, |)$ è totalmente ordinato, se è ben ordinato, quali sono gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo.

• Considerato il sottoinsieme $V = \{5, 8, 10, 20\}$ di $(T, |)$, si dica se esistono, e quali sono, l'estremo inferiore e l'estremo superiore di V in T.

• Si dimostri che l'applicazione $h : n \in T \mapsto 2n \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di insiemi ordinati di $(T, |)$ in $(\mathbb{N}, \leq)$, dove $\leq$ denota l'ordine usuale su $\mathbb{N}$.

Esercizio 6. Si considerino i numeri interi $a = 784$, $b = 525$.

- Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si calcoli il massimo comun divisore positivo (a, b).
- Si esprima (a, b) nella forma $(a, b) = \alpha a + \beta b$, con α, $\beta \in \mathbb{Z}$.
- Si calcoli il minimo comune multiplo positivo $[a, b]$.

Esercizio 7. Si determini l'unico numero naturale a compreso tra 200 e 289 tale che simultaneamente si abbia $a \equiv 8 \pmod 9$ e $a \equiv 7 \pmod{10}$.

Esercizio 8. Si dimostri che $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = 2n^2 - n$, per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 9.

- Quanti numeri distinti si possono ottenere utilizzando tutte le cifre del numero 245.454.562 ?
- Quanti sono i numeri naturali che hanno una rappresentazione in base 7 del tipo $(2 \star \star 5 \star)_7$ con cifre tutte distinte?
- Se si vogliono giocare al lotto tutti gli ambi e i terni che si possono ottenere con i numeri 12, 34, 56 e 78, quante combinazioni è necessario giocare?

Esercizio 10. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} x + 4y + 5z = 2 \\ 2x + z = 3 \\ 3x + 3y + 2z = 1 \end{cases}$$