Matematica Discreta

Gruppo 1 – Dott. C. Delizia

20 Febbraio 2002

Esercizio 1. Siano A, B e C insiemi, con $A \subseteq B$. Si dimostri che $A \cup C \subseteq B \cup C$.

Esercizio 2. Siano $6\mathbb{N} = \{6n \; : \; n \in \mathbb{N}\}$, $9\mathbb{N} = \{9n \; : \; n \in \mathbb{N}\}$. Senza elencarne gli elementi, si descrivano i seguenti insiemi:

$6\mathbb{N} \cap 9\mathbb{N} =$

$6\mathbb{N} \setminus 9\mathbb{N} =$

$9\mathbb{N} \setminus 6\mathbb{N} =$

Esercizio 3. Si dica se la corrispondenza $\{(x, y) \; : \; x \in \mathbb{N}^\star,\, y \in \mathbb{Z},\, x = |y| + 1\}$ è un'applicazione di $\mathbb{N}^\star$ in $\mathbb{Z}$, motivando la risposta.

Esercizio 4. Sia $A = \{1,\, 2,\, 3\}$. Si scrivano tutte le possibili partizioni di A.

Esercizio 5. Siano $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ e $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ le applicazioni definite ponendo

$$f(n) = n + 3, \; \forall n \in \mathbb{Z}, \qquad g(m) = \tfrac{m}{3}, \; \forall m \in \mathbb{Z}.$$

- Si stabilisca se esiste l'applicazione inversa f^{-1}, ed in tal caso la si determini.
- Si stabilisca se esiste l'applicazione inversa g^{-1}, ed in tal caso la si determini.
- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$, e si dimostri che essa è iniettiva ma non suriettiva.
- Si calcoli:

  $f(\mathbb{N}) =$

  $g^{-1}(\{\tfrac{1}{2},\, \tfrac{2}{3}\}) =$

  $(g \circ f)(6\mathbb{Z}) =$
- Si dica se è possibile definire l'applicazione $f \circ g$, motivando la risposta.

Esercizio 6. Si consideri l'insieme S costituito dai numeri naturali della forma $3n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$:

$$S = \{3n + 1 : \; n \in \mathbb{N}\}.$$

- Si dimostri che S non è una parte stabile di $(\mathbb{N}, +)$, dove $+$ denota la usuale somma in $\mathbb{N}$.
- Si dimostri che S è un sottomonoide di $(\mathbb{N}, \cdot)$, dove $\cdot$ denota l'usuale prodotto in $\mathbb{N}$.
- Si verifichi che la relazione $\mathcal{R}$ definita in S ponendo

$$3n + 1 \; \mathcal{R} \; 3m + 1 \;\Leftrightarrow\; n + m \in 2\mathbb{N}$$

è di equivalenza.
- Si descrivano le seguenti classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$:

  $[1]_\mathcal{R} =$

  $[4]_\mathcal{R} =$

  $[7]_\mathcal{R} =$
- Si descriva l'insieme quoziente $S/\mathcal{R}$.
- Si provi che la relazione $\mathcal{R}$ è compatibile con il prodotto in $\mathbb{N}$, e che quindi la posizione

$$[3n + 1]_\mathcal{R} \cdot [3m + 1]_\mathcal{R} \; = \; [3(3nm + n + m) + 1]_\mathcal{R}$$

definisce un'operazione binaria nell'insieme quoziente $S/\mathcal{R}$.
- Si provi che l'applicazione $f : \; [3n + 1]_\mathcal{R} \in S/\mathcal{R} \;\mapsto\; [n]_2 \in \mathbb{Z}_2$ è ben posta.
- Si dimostri che f non è un omomorfismo di monoidi di $(S/\mathcal{R}, \cdot)$ in $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Esercizio 7. Si consideri l'insieme $S = \{3n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$, e sia $\leq$ la relazione definita in S ponendo
$$3n + 1 \leq 3m + 1 \Leftrightarrow n|m,$$
dove $|$ è la relazione del *divide* in $\mathbb{N}$.

- Si dimostri che $\leq$ è una relazione d'ordine in S.
- Si precisi se $(S, \leq)$ è totalmente ordinato e se è ben ordinato.
- Si dimostri che $(S, \leq)$ è un reticolo.
- Si dimostri che l'applicazione $f : 3n + 1 \in S \mapsto n \in \mathbb{N}$ è un isomorfismo di reticoli tra $(S, \leq)$ ed $(\mathbb{N}, |)$.
- Si specifichi se esistono, e quali sono, il minimo ed il massimo di $(S, \leq)$.
- Si disegni il diagramma di Hasse del sottoinsieme $T = \{7, 10, 13, 19, 37\}$ di S.
- Si dica se T è un sottoreticolo di S, motivando la risposta.

Esercizio 8. Si determini l'unico numero naturale a compreso tra 400 e 1000 tale che simultaneamente si abbia $a \equiv 12 \pmod{14}$ e $a \equiv 15 \pmod{25}$.

Esercizio 9. Si consideri la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}).$$
Si dimostri per induzione su n che $A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 10. Si consideri l'insieme X costituito da tutti i numeri naturali che hanno una rappresentazione in base 7 del tipo $(1 \star 3 \star)_7$.

- Qual è l'ordine di X?
- Quanti sono i sottoinsiemi di ordine 10 di X?
- Sia Y il sottoinsieme di X costituito dagli elementi di X che si rappresentano in base 7 con cifre tutte distinte. Qual è l'ordine di Y?
- Qual è il massimo tra gli elementi di Y (nell'ordinamento indotto su Y dall'ordine naturale di $\mathbb{N}$)?

Esercizio 11. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:
$$\begin{cases} 5x + 4y = 2 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$