Matematica Discreta

Gruppo 1 – Dott. C. Delizia

3 Luglio 2002

Esercizio 1. Ad una corsa ippica partecipano 18 cavalli, contrassegnati con un numero da 1 a 18. Si ottiene una vincita al gioco della Tris indovinando i primi tre cavalli classificati, nell'esatto ordine di arrivo.

• Quante combinazioni occorrerebbe giocare per essere certi di vincere?

• Quante sono tutte le combinazioni possibili che prevedono la vittoria del cavallo numero 3?

• Quante sono tutte le combinazioni possibili in cui compare il cavallo numero 3?

Esercizio 2. Si dica se la corrispondenza $\{(\frac{x}{y}, n) \, : \, \frac{x}{y} \in \mathbb{Q},\, n \in \mathbb{Z},\, n = x - y\}$ è un'applicazione di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{Z}$, motivando la risposta.

Esercizio 3. Si determinino tutti i numeri naturali positivi $a \leq 1000$ tale che simultaneamente si abbia $a \equiv 17 \pmod{19}$ e $a \equiv 20 \pmod{21}$.

Esercizio 4. Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ e $g : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ le applicazioni definite ponendo

$$f(n) = \frac{n+3}{n+4},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{4y}{x},\ \forall\ \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

• Si stabilisca se l'applicazione f è iniettiva, se è suriettiva, se esiste l'inversa.

• Si verifichi che l'applicazione g è biettiva, e se ne determini l'inversa.

• Si determini l'applicazione composta $g \circ f$, e si dimostri che essa è iniettiva ma non suriettiva.

• Si calcoli:

$f(\{0,\, 1,\, 2\}) =$

$f^{-1}(\{\frac{2}{5}\}) =$

$g^{-1}(\{\frac{1}{2},\, \frac{2}{3}\}) =$

$(g \circ f)^{-1}(\{\frac{24}{5}\}) =$

Esercizio 5. Nell'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi si consideri l'operazione interna $\perp$ definita ponendo

$$n \perp m \;=\; n + m + 2,$$

per ogni $n,\, m \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che $\mathbb{N}$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}, \perp)$.

• Si dimostri che $(\mathbb{Z}, \perp)$ è un gruppo abeliano.

• Si verifichi che la relazione $\mathcal{R}$ definita in $\mathbb{Z}$ ponendo

$$n \,\mathcal{R}\, m \;\Leftrightarrow\; 5 \text{ divide } m - n$$

è di equivalenza.

• Si descriva l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

• Si provi che la relazione $\mathcal{R}$ è compatibile con l'operazione $\perp$ in $\mathbb{Z}$, e che quindi la posizione

$$[n]_{\mathcal{R}} \;\perp\; [m]_{\mathcal{R}} \;=\; [n + m + 2]_{\mathcal{R}}$$

definisce un'operazione binaria nell'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

• Si provi che l'applicazione $f\,:\, [n]_{\mathcal{R}} \in \mathbb{Z}/\mathcal{R} \;\mapsto\; [2n]_5 \in \mathbb{Z}_5$ è ben posta.

• Si dimostri che f non è un omomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{Z}/\mathcal{R}, \perp)$ e $(\mathbb{Z}_5, +)$.

Esercizio 6. Sia $S = \{3\,, 4\,, 5\,,\ 6\}$. Si consideri poi l'insieme $\mathcal{P}(S)$ delle parti di S.
- Si dimostri che l'inclusione insiemistica $\subseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathcal{P}(S)$.
- Si precisi se $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è totalmente ordinato, e perché.
- Si precisi se $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è ben ordinato, e perché.
- Si dimostri che $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è un reticolo.
- Sia W l'insieme dei numeri naturali da 0 a 18, ordinato con l'ordinamento naturale $\leq$ di $\mathbb{N}$. Si dimostri che l'applicazione f definita ponendo

$$f(\emptyset) = 0, \qquad\qquad f(A) = \sum_{n \in A} n, \quad \forall A \neq \emptyset$$

è un omomorfismo di insiemi ordinati tra $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ e $(W, \leq)$.
- Si dimostri che f non è un omomorfismo di reticoli tra $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ e $(W, \leq)$.
- Si dimostri che f non è iniettiva né suriettiva.

Esercizio 7. Con le stesse notazioni dell'esercizio 6, si consideri il sottoinsieme X di $\mathcal{P}(S)$ costituito dai sottoinsiemi propri di S contenenti l'elemento 4,

$$X = \{A \in \mathcal{P}(S) \,:\, 4 \in A\,,\ A \neq S\}.$$

- Quali sono gli elementi di X?
- Si disegni il diagramma di Hasse $(X, \subseteq)$.
- Si dica se $(X, \subseteq)$ è un sottoreticolo di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, e perchè.
- Si determinino gli elementi minimali e quelli massimali di $(X, \subseteq)$.
- Si specifichi se esitono, e quali sono, il minimo e il massimo di $(X, \subseteq)$.
- Si determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore di X in $\mathcal{P}(S)$.

Esercizio 8. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}).$$

- Si stabilisca se A è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.
- Si dimostri per induzione su n che $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 9. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 11:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 3 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$$