Matematica Discreta

Gruppo 1 – Dott. C. Delizia

11 Settembre 2002

Esercizio 1. Si considerino gli insiemi $A = \{-2\,,\,-1\,,\,0\,,\,1\,,\,2\}$, $B = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\}$.

• Si effettuino le seguenti operazioni tra insiemi:

$A \cup B =$

$A \cap B =$

$A \setminus B =$

$(A \cup B) \setminus (A \cap B) =$

• Si precisi se ciascuna delle seguenti proposizioni è vera o falsa:

$\{0\,,\,1\} \in \mathcal{P}(A)$

$\emptyset \in \mathcal{P}(B)$

$(0\,,\,1) \in A \times B$

$(1\,,\,3) \in B \times A$

$(0\,,\,\{3\}) \in A \times \mathcal{P}(B)$

• Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(A)$?

• Quanti sono i sottoinsiemi di ordine 2 di A ?

• Quanti sono i sottoinsiemi di A aventi ordine al più 3 ?

• Quante sono tutte le possibili applicazioni di A in B ?

• Quante sono tutte le possibili applicazioni iniettive di A in B ?

• Quante sono tutte le possibili applicazioni iniettive di B in A ?

• Quante sono tutte le possibili applicazioni biettive di A in A ?

• Quante differenti cinquine ordinate si possono ottenere considerando i valori assoluti degli elementi di A ?

Esercizio 2. Si considerino le applicazioni

$$f : n \in \mathbb{Z} \longmapsto 1 + n^2 \in \mathbb{N}\,, \qquad g : n \in \mathbb{N} \longmapsto -2n \in \mathbb{Z}.$$

• Si dimostri che f non è iniettiva né suriettiva.

• Si dimostri che g è iniettiva ma non suriettiva.

• Si determini l'applicazione composta $f \circ g$, e si stabilisca se essa è iniettiva, motivando la risposta.

• Si calcoli:

$f(\{2\,,\,3\}) =$

$f^{-1}(\{2\}) =$

$f^{-1}(\{3\}) =$

$g^{-1}(\{2\,,\,3\}) =$

$(f \circ g)^{-1}(\{17\}) =$

Esercizio 3. Si consideri l'insieme $X = \{2\,,\,3\,,\,4\,,\,\dots\}$ costituito dai numeri naturali maggiori di 1.

• Si dimostri che $(X,\,\cdot)$ è un semigruppo commutativo, dove $\cdot$ denota la usuale moltiplicazione tra numeri naturali.

• Si dimostri che l'applicazione $\quad h : x \in X \longmapsto 2x \in X \quad$ non è un omomorfismo di semigruppi.

• Si dimostri che $(X,\,\cdot)$ non è un monoide.

• Si consideri la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo, per ogni $x,\,y \in X$,

$x\,\mathcal{R}\,y \quad \Longleftrightarrow \quad$ il massimo divisore primo di x coincide col massimo divisore primo di y.

Si dimostri che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in X.

• Si determinino le seguenti classi di equivalenza:

$[2]_{\mathcal{R}} =$

$[3]_{\mathcal{R}} =$

$[4]_{\mathcal{R}} =$

$[5]_{\mathcal{R}} =$

$[6]_{\mathcal{R}} =$

• L'insieme quoziente $X/\mathcal{R}$ è infinito. Perché ?

• Si provi che la relazione $\mathcal{R}$ è compatibile con il prodotto in X.

• Si dimostri che la struttura quoziente $(X/\mathcal{R},\,\cdot)$ è un monoide commutativo, precisandone l'elemento neutro.

• Si dimostri che l'applicazione $\quad k : x \in X \longmapsto [2x]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} \quad$ è un omomorfismo di semigruppi.

Esercizio 4. Si consideri l'insieme $S = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,,\,6\,,\,8\,,\,9\,,\,12\,,\,18\,,\,36\}$ dei divisori positivi di 36.

• Si dimostri che $(S,\,|)$ è un reticolo, dove $|$ denota la usuale relazione del *divide* tra numeri naturali.

• Si stabilisca se $(S,\,|)$ è totalmente ordinato, e perchè.

• Si stabilisca se $(S,\,|)$ è ben ordinato, e perchè.

• Si determinino gli eventuali minimo e massimo di $(S,\,|)$.

• Nel reticolo $(S,\,|)$ si effettuino i seguenti calcoli:

$4 \vee 6 =$

$4 \wedge 6 =$

$12 \vee 18 =$

$12 \wedge 18 =$

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(S,\,|)$.

• Sia $T = \{2\,,\,3\,,\,4\,,\,6\}$. Si determinino l'estremo inferiore e l'estremo superiore di T in S.

Esercizio 5. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 0$ risulta

$$1 + 4 + 7 + \cdots + (1 + 3n) \;=\; \frac{3n^2 + 5n + 2}{2}.$$

Esercizio 6. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 4 \\ 4x + y - 4z = 3 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$