

MATEMATICA DISCRETA

DOTT. C. DELIZIA

2 MAGGIO 2006

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

Esercizio 1. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri $a = 678$ e $b = 456$, e si lo si esprima nella forma $d = \alpha a + \beta b$, con α e β interi.

Esercizio 2.

- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 9 nella forma $(15 \star 2 \star)_9$?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 9 nella forma $(15 \star 2 \star)_9$, con cifre tutte distinte?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 9 nella forma $(35 \star 1 \star)_9$, con cifre tutte dispari?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 9 nella forma $(35 \star 1 \star)_9$, con cifre tutte dispari e distinte?
- Quanti sono i numeri naturali che si possono rappresentare in base 9 utilizzando esattamente le cifre del numero $(35214)_9$?
- Quanti sono i numeri naturali che si possono rappresentare in base 9 utilizzando esattamente le cifre del numero $(35535)_9$?
- Si rappresenti in base 9 il numero 2301.

Esercizio 3. Si determinino tutti gli interi a che siano soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a \equiv 5 \pmod{8} \\ 2a \equiv 4 \pmod{6} \\ a \equiv 4 \pmod{5} \\ |a| \leq 100 \end{cases}$$

Esercizio 4. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_7 , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1} , e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

Esercizio 6. Si dica se la corrispondenza $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x = 3y\}$ è un'applicazione, motivando la risposta.

Esercizio 7. Si considerino le applicazioni

$$f : n \in \mathbb{N} \mapsto n - 3 \in \mathbb{Z}, \quad g : m \in \mathbb{Z} \mapsto (m + 3)^2 \in \mathbb{N}.$$

- Si dica se f è iniettiva, e perché.
- Si dica se f è suriettiva, e perché.
- Si dica se g è iniettiva, e perché.
- Si dica se g è suriettiva, e perché.
- Si determinino le applicazioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$, e si stabilisca se esse sono iniettive, suriettive o biettive, motivando le risposte.

- Si calcoli:

$$f^{-1}(\{5, 6\}) =$$

$$g(\{2, 3\}) =$$

$$g^{-1}(\{0, 1\}) =$$

Esercizio 8. Si consideri l'operazione \perp definita ponendo

$$a \perp b = a + b - 2ab,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

- Si dimostri che la struttura algebrica (\mathbb{Z}, \perp) è un monoide commutativo.

- Quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide (\mathbb{Z}, \perp) ?

- Motivando la risposta, si stabilisca se (\mathbb{N}, \perp) è un sottomonoido di (\mathbb{Z}, \perp) .

Esercizio 9. Si consideri l'insieme

$$S = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$$

ordinato con la relazione $|$ indotta dalla relazione del *divide* tra numeri naturali.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(S, |)$.

- Si precisi se $(S, |)$ è totalmente ordinato, e se è ben ordinato.

- Si dimostri che $(S, |)$ è un reticolo.

- Sia $U = \{3, 4, 6\}$. Si determinino:
 - l'insieme degli elementi minimali di $U =$
 - $\min(U) =$
 - l'insieme degli elementi massimali di $U =$
 - $\max(U) =$
 - $\sup_S(U) =$
 - $\inf_S(U) =$

Esercizio 10. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 3$ risulta

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n.$$