Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

14 Febbraio 2007

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

<u>Esercizio 1.</u> Siano A, B e C insiemi.

- Si dimostri che $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

- Si dimostri che in generale non vale l'uguaglianza $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

- Si faccia un esempio di insiemi A e B con $|A| = 5$, $|A \setminus B| = 3$ e $|A \triangle B| = 4$.

<u>Esercizio 2.</u> Si determini il più piccolo intero positivo che si rappresenta in base 7 con 4 cifre tutte distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 5.

ESERCIZIO 3. Si dimostri che per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

ESERCIZIO 4. Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 1155$ e $b = 245$, e si determinino i coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

ESERCIZIO 5.

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 8 costituita da sei cifre ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 8 costituita da sei cifre tutte distinte ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono in base 8 una rappresentazione di sei cifre in cui compare una volta la cifra 1, due volte la cifra 2 e tre volte la cifra 3 ?

• Quante sono le possibili applicazioni non iniettive di $\mathbb{Z}_4$ in $\mathbb{Z}_5$?

• Quante sono le possibili applicazioni iniettive ma non suriettive di $\mathbb{Z}_7$ in $\mathbb{Z}_7$, e perchè ?

<u>Esercizio 6.</u> Motivando la risposta, si stabilisca se la corrispondenza

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \, : \, x + y > 4\}$$

è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

<u>Esercizio 7.</u> Si considerino le applicazioni

$$f \; : \; x \in \mathbb{Z} \; \mapsto \; (x+3)^2 \in \mathbb{Z}, \qquad g \; : \; x \in \mathbb{Z} \; \mapsto \; \tfrac{4}{3}x \in \mathbb{Q}.$$

• Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

• Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

• Si calcoli:

$g(6N) =$

$f^{-1}(\{1\,,\,2\,,\,4\}) =$

• Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

• Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva, e perchè.

<u>ESERCIZIO 8.</u> Si stabilisca se l'applicazione

$$h \,:\, x \in \mathbb{Q} \;\mapsto\; 1 - \tfrac{2}{5}x \in \mathbb{Q}$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

<u>ESERCIZIO 9.</u> Sia $A = \{2\,,\,3\,,\,4\,,\,\dots\}$ l'insieme dei numeri naturali maggiori di 1. Si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ in A definita ponendo

$x \sim y \iff$ x e y hanno lo stesso numero di fattori primi **(non necessariamente distinti)**.

• Si stabilisca se è vero o falso che:

$2 \sim 5$

$12 \sim 14$

$10 \sim 27$

$21 \sim 22$

• Si calcoli:

$[2]_\sim =$

$[4]_\sim =$

$[16]_\sim =$

• Quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente $A/_\sim$?

• Si spieghi per quale motivo l'applicazione

$$f \,:\, [a]_\sim \in A/_\sim \;\mapsto\; [a+1]_\sim \in A/_\sim$$

non è ben posta.

<u>ESERCIZIO 10.</u> Sia $\mathcal{F}$ una partizione di un insieme non vuoto A. In quale modo è possibile definire una relazione di equivalenza $\sim$ in A tale da aversi $A/_{\sim} = \mathcal{F}$?

<u>ESERCIZIO 11.</u> Si consideri la relazione $\sim$ in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definita ponendo $x \sim y \iff xy > 0$. Motivando la risposta, si stabilisca se $\sim$ è una relazione di equivalenza.

<u>ESERCIZIO 12.</u> Si determinino il più piccolo intero positivo e il più grande intero negativo che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{9} \\ 2x \equiv 6 \pmod{10} \\ x \equiv 4 \pmod{11} \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 13.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 11:**

$$\begin{cases} 3x + y + z = 2 \\ x + 2y + 4z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 14.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

Esercizio 15. Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

Esercizio 16. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{Z}_5).$$

<u>Esercizio 17.</u> Si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo

$$a \star b \ = \ 3a + 3b - 2,$$

per ogni $a,\ b \in \mathbb{Z}$.

• Si stabilisca se l'operazione $\star$ è commutativa.

• Si stabilisca se la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$ è un semigruppo.

• Si stabilisca se il sottoinsieme $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ dei numeri interi dispari è una parte stabile di $(\mathbb{Z}, \star)$.

• Si stabilisca se la relazione $\equiv_2$ di congruenza mod.2 in $\mathbb{Z}$ è compatibile rispetto all'operazione $\star$.

<u>Esercizio 18.</u>

• Sia $n > 1$ un intero. Si dimostri che $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ è un campo se e solo se n è primo.

• Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Si dimostri che $0 \cdot a = 0$ per ogni $a \in A$.

<u>ESERCIZIO 19.</u> Si determini la tabella moltiplicativa degli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$.

<u>ESERCIZIO 20.</u> Sia $A = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}\}$.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \subseteq)$, dove $\subseteq$ denota la relazione di inclusione insiemistica.

• Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, \subseteq)$ è un insieme totalmente ordinato.

• Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, \subseteq)$ è un insieme ben ordinato.

• Si stabilisca se $(A, \subseteq)$ è un reticolo, e perchè.

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di $(A, \subseteq)$.

• Sia $S = \{\{1,3\}, \{1,4\}\}$. Si calcoli l'estremo superiore di S in A.

• Quali sono i minoranti in A del sottoinsieme S ?