Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

21 Febbraio 2008

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Dato un insieme A, si denoti con $\mathcal{P}(A)$ l'insieme delle parti di A.

- Si dimostri che se A e B sono insiemi risulta sempre $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

- Si mostri con un esempio che l'inclusione precedente può essere stretta.

Esercizio 2. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 3$ risulta

$$\sum_{i=3}^{n} 6i = 3n^2 + 3n - 18.$$

<u>Esercizio 3.</u> Motivando la risposta, si stabilisca se la corrispondenza

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x = y + 2\}$$

è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

<u>Esercizio 4.</u> Si considerino le applicazioni

$$f \,:\, x \in \mathbb{N}^\star \;\mapsto\; \frac{x+3}{x} \in \mathbb{Q}, \qquad g \,:\, x \in \mathbb{Q} \;\mapsto\; \frac{2x+1}{2} \in \mathbb{Q}.$$

- Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

- Si calcoli:
  $g(N_d) =$
  $f^{-1}(\{0\,,\,1\,,\,-2\}) =$

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.

ESERCIZIO 5. Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 2456$ e $b = 252$, e si determinino due coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

ESERCIZIO 6. Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 3x \equiv 15 \pmod{18} \\ 2x \equiv 10 \pmod{14} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \\ -10 \leq x \leq 505 \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 7.</u> Si determini il più grande intero positivo che si rappresenta in base 9 con tre cifre di cui almeno due distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 5.

<u>ESERCIZIO 8.</u>

• Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono scrivere utilizzando le lettere della parola ARCHITETTURA ?

<u>ESERCIZIO 9.</u>

• Sia n un intero non negativo. Si dimostri che

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

<u>ESERCIZIO 10.</u> Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, B l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A aventi ordine 3. Si consideri la relazione $\sim$ definita ponendo

$$\{a, b, c\} \sim \{d, e, f\} \iff a + b + c = d + e + f$$

per ogni $\{a, b, c\}, \{d, e, f\} \in B$.

• Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza in B.

• Si calcoli:

$[\{1, 2, 3\}]_\sim =$

$[\{1, 2, 4\}]_\sim =$

$[\{1, 2, 5\}]_\sim =$

$[\{1, 2, 6\}]_\sim =$

• Quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente $B/_\sim$?

<u>ESERCIZIO 11.</u> Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A. Si dimostri che, per ogni $a, b \in A$, si ha $[a]_\sim \neq [b]_\sim \iff [a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$.

<u>ESERCIZIO 12.</u> Si enunci il *teorema fondamentale sulle relazioni di equivalenza*.

<u>ESERCIZIO 13.</u> Sia A l'insieme dei divisori positivi di 24.

• Si descriva l'insieme A, elencandone gli elementi.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide*.

• Si dimostri che $(A, |)$ è un reticolo.

• Si calcoli l'estremo superiore in A del sottoinsieme $\{2, 3, 4\}$.

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di $A \setminus \{1, 24\}$.

<u>ESERCIZIO 14.</u> Si considerino l'insieme $\mathbb{Z}_4$ e l'operazione $\star$ definita ponendo

$$a \star b = 3ab$$

per ogni a, $b \in \mathbb{Z}_4$.

• Si compili la tabella moltiplicativa di $(\mathbb{Z}_4, \star)$.

• Si verifichi che $(\mathbb{Z}_4, \star)$ è un monoide commutativo.

• Si determini un sottoinsieme avente ordine 2 che risulti una parte stabile di $(\mathbb{Z}_4, \star)$.

• Si determinino tutti gli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_4, \star)$.

• Si spieghi per quale motivo i monoidi $(\mathbb{Z}_4, \star)$ e $(\mathbb{Z}_4, +)$ non sono isomorfi.

<u>ESERCIZIO 15.</u> Si dimostri che *gli elementi invertibili di un monoide formano un gruppo*.

<u>ESERCIZIO 16.</u> Si dia la definizione di *determinante di una matrice quadrata*.

ESERCIZIO 17. Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

ESERCIZIO 18. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}_7).$$

<u>Esercizio 19.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:**

$$\begin{cases} 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 3z = 3 \\ 4x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

<u>Esercizio 20.</u> Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_{11}).$$