Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

24 Gennaio 2007

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Siano A, B e C insiemi.

- Si dimostri che $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

- Si dimostri che in generale non vale l'uguaglianza $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

- Si faccia un esempio di insiemi A e B con $|A| = 4$, $|B| = 3$ e $|A \triangle B| = 5$.

Esercizio 2. Si determini il più grande intero positivo che si rappresenta in base 8 con 4 cifre tutte distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 5.

<u>Esercizio 3.</u> Si dimostri che per ogni $n \geq 1$ si ha
$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

<u>Esercizio 4.</u> Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 770$ e $b = 615$, e si determinino i coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

<u>Esercizio 5.</u>

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 7 costituita da cinque cifre ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 7 costituita da cinque cifre tutte distinte ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono in base 7 una rappresentazione di cinque cifre in cui compare due volte la cifra 1 e tre volte la cifra 2 ?

• Quante sono le possibili applicazioni non iniettive di $\mathbb{Z}_3$ in $\mathbb{Z}_5$?

• Quante sono le possibili applicazioni iniettive ma non suriettive di $\mathbb{Z}_4$ in $\mathbb{Z}_4$, e perchè ?

<u>Esercizio 6.</u> Motivando la risposta, si stabilisca se la corrispondenza
$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x + y = 5\}$$
è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

<u>Esercizio 7.</u> Si considerino le applicazioni
$$f \;:\; x \in \mathbb{Z} \;\mapsto\; x^2 + 2 \in \mathbb{Z}, \qquad g \;:\; x \in \mathbb{Z} \;\mapsto\; \tfrac{5}{2}x \in \mathbb{Q}.$$

- Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

- Si calcoli:

  $g(N_p) =$

  $f^{-1}(\{1\,,\,2\,,\,4\}) =$

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva, e perchè.

<u>ESERCIZIO 8.</u> Si stabilisca se l'applicazione

$$h\ :\ x \in \mathbb{Q}\ \mapsto\ \tfrac{3}{4}x - 2 \in \mathbb{Q}$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

<u>ESERCIZIO 9.</u> Si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ in $\mathbb{N}$ definita ponendo

$x \sim y \iff$ x e y hanno lo stesso numero di cifre **distinte** in rappresentazione decimale.

• Si stabilisca se è vero o falso che:

$115 \sim 1000$

$100 \sim 1001$

$400 \sim 4$

$123 \sim 134$

• Si calcoli:

$[3]_\sim =$

$[21]_\sim =$

$[100]_\sim =$

• Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $\mathbb{N}/_\sim$?

• Si spieghi per quale motivo l'applicazione

$$f\ :\ [a]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim\ \mapsto\ [a+1]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim$$

non è ben posta.

<u>Esercizio 10.</u> Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A. Si dimostri che, per ogni $a, b \in A$, si ha $[a]_\sim = [b]_\sim \iff a \sim b$.

<u>Esercizio 11.</u> Si consideri la relazione $\sim$ in $\mathbb{Z}$ definita ponendo $x \sim y \iff xy \geq 0$. Motivando la risposta, si stabilisca se $\sim$ è una relazione di equivalenza.

<u>Esercizio 12.</u> Si determinino il più piccolo intero positivo e il più grande intero negativo che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ 2x \equiv 8 \pmod{10} \\ x \equiv 11 \pmod{13} \end{cases}$$

<u>Esercizio 13.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:**

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ \qquad x + 5z = 1 \end{cases}$$

<u>Esercizio 14.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

<u>ESERCIZIO 15.</u> Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$

<u>ESERCIZIO 16.</u> Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{Z}_3).$$

<u>ESERCIZIO 17.</u> Si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo

$$a \star b \;=\; 2a + 2b + 1,$$

per ogni $a,\ b \in \mathbb{Z}$.

• Si stabilisca se l'operazione $\star$ è commutativa.

• Si stabilisca se l'operazione $\star$ è associativa.

• Si stabilisca se il sottoinsieme $\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ dei numeri interi dispari è una parte stabile di $(\mathbb{Z}, \star)$.

• Si stabilisca se il sottoinsieme $3\mathbb{Z}$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}, \star)$.

• Si stabilisca se la relazione $\equiv_3$ di congruenza mod.3 in $\mathbb{Z}$ è compatibile rispetto all'operazione $\star$.

<u>ESERCIZIO 18.</u> Sia $\perp$ una operazione binaria in un insieme S.

• Si dimostri che l'eventuale elemento neutro di $(S, \perp)$ è unico.

• Si dimostri che se, $\perp$ è associativa e ammette elemento neutro, ogni elemento simmetrizzabile di $(S, \perp)$ ammette un unico simmetrico.

<u>Esercizio 19.</u> Si determinino tutti i divisori dello zero dell'anello $(\mathbb{Z}_{20}, +, \cdot)$.

<u>Esercizio 20.</u> Sia $A = \{2\,,\,3\,,\,4\,,\,5\,,\,6\,,\,15\,,\,60\,,\,90\,,\,120\,,\,180\}$.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide*.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è un insieme totalmente ordinato.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è un insieme ben ordinato.

- Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è un reticolo.

- Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di A.

- Quali sono i minoranti in A del sottoinsieme $B = \{60\,,\,90\}$?

- Si calcoli l'estremo superiore in A del sottoinsieme $C = \{2\,,\,3\,,\,5\}$.