Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

31 Gennaio 2008

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ sia $n\mathbb{Z} = \{na : a \in \mathbb{Z}\}$. Sia inoltre $A = \{a \in \mathbb{Z} : -6 \leq a \leq 6\}$. Elencandone gli elementi, si descrivano i seguenti insiemi:

$(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}) \cap A =$

$(2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) \cap A =$

$(2\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}) \cap A =$

$(2\mathbb{Z} \triangle 3\mathbb{Z}) \cap A =$

Esercizio 2. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 4$ risulta

$$\sum_{i=4}^{n} 2i = n^2 + n - 12.$$

<u>Esercizio 3.</u> Motivando la risposta, si stabilisca se la corrispondenza

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Q} \, : \, y = \frac{x}{x^2 + x - 12} \right\}$$

è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Q}$.

<u>Esercizio 4.</u> Si considerino le applicazioni

$$f \, : \, x \in \mathbb{Z} \mapsto x^2 - 2 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \qquad g \, : \, x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \mapsto \frac{x+1}{x} \in \mathbb{Q}.$$

• Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

• Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

• Si calcoli:

$g(N_d) =$

$f^{-1}(\{-1\,,\,1\,,\,2\}) =$

• Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

• Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.

<u>Esercizio 5.</u> Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 378$ e $b = 129$, e si determinino due coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

<u>Esercizio 6.</u> Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{7} \\ 2x \equiv 10 \pmod{22} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ -25 \leq x \leq 800 \end{cases}$$

<u>Esercizio 7.</u> Si determini il più piccolo intero positivo che si rappresenta in base 7 con quattro cifre tutte distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 8.

<u>Esercizio 8.</u>

• Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono scrivere utilizzando le lettere della parola SCACCHISTA ?

<u>Esercizio 9.</u>

• Siano n e t interi con $0 \leq t \leq n$. Si dimostri che un insieme di ordine n ha esattamente $\binom{n}{t}$ sottoinsiemi di ordine t.

<u>ESERCIZIO 10.</u> Sia $A = \{10, 11, 12, \dots, 98, 99\}$ l'insieme dei numeri naturali a due cifre, e si consideri la relazione $\sim$ definita ponendo

$$a \sim b \iff \text{la somma delle due cifre di } a \text{ è uguale alla somma delle due cifre di } b$$

per ogni $a, b \in A$.

• Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza in A.

• Si calcoli:

$[10]_\sim =$

$[11]_\sim =$

$[12]_\sim =$

$[20]_\sim =$

• Quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente $A/_\sim$?

<u>ESERCIZIO 11.</u> Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A. Si dimostri che, per ogni $a, b \in A$, si ha $[a]_\sim = [b]_\sim \iff a \sim b$.

<u>ESERCIZIO 12.</u> Si dia la definizione di *partizione di un insieme*.

<u>Esercizio 13.</u> Sia $A = \{11, 12, \ldots, 19, 20\}$ l'insieme dei numeri naturali compresi tra 11 e 20. Si consideri in A la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 10a < 9b$$

per ogni $a, b \in A$ (dove $<$ denota la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$).

• Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in A.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$.

• Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, motivando la risposta.

• Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è un reticolo, motivando la risposta.

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di $(A, \sqsubseteq)$.

<u>ESERCIZIO 14.</u> Si considerino l'insieme $\mathbb{Z}_4$ e l'operazione $\star$ definita ponendo

$$a \star b = a + b + ab$$

per ogni a, $b \in \mathbb{Z}_4$.

• Si compili la tabella moltiplicativa di $(\mathbb{Z}_4, \star)$.

• Si verifichi che $(\mathbb{Z}_4, \star)$ è un monoide commutativo.

• Si determini un sottomonoide di $(\mathbb{Z}_4, \star)$ avente ordine 3.

• Si determinino tutti gli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_4, \star)$.

• Si stabilisca se l'applicazione $f : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4$ definita ponendo $f(a) = 3a$ per ogni $a \in \mathbb{Z}_4$ è un omomorfismo di monoidi di $(\mathbb{Z}_4, \star)$ in $(\mathbb{Z}_4, \star)$.

<u>ESERCIZIO 15.</u> Siano $(M, \perp)$ un monoide commutativo, e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in M compatibile con $\perp$. Si dimostri che la struttura quoziente $(M/_{\mathcal{R}}, \perp)$ è ancora un monoide commutativo.

<u>ESERCIZIO 16.</u> Si dia un esempio di semigruppo di ordine 7 che non sia un monoide.

<u>Esercizio 17.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

<u>Esercizio 18.</u> Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Z}_5).$$

<u>ESERCIZIO 19.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 11:**

$$\begin{cases} 5y + 7z = 1 \\ 2x + 3z = 2 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 20.</u> Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7).$$