Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

14 Giugno 2007

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ sia $n\mathbb{Z} = \{na : a \in \mathbb{Z}\}$. Sia inoltre $A = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a \leq 9\}$. Elencandone gli elementi, si descrivano i seguenti insiemi:

$(2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}) \cap A =$

$(2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z}) \cap A =$

$(2\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}) \cap A =$

$(2\mathbb{Z} \triangle 3\mathbb{Z}) \cap A =$

Esercizio 2. Sia a un numero reale fissato. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 1$ risulta

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1).$$

ESERCIZIO 3. Motivando la risposta, si stabilisca se la corrispondenza

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \,:\, |x| - y = 2\}$$

è un'applicazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{N}$.

ESERCIZIO 4. Si considerino le applicazioni

$$f \,:\, x \in \mathbb{Z} \;\mapsto\; \tfrac{|x|}{3} \in \mathbb{Q}, \qquad g \,:\, x \in \mathbb{Q} \;\mapsto\; 5x + 2 \in \mathbb{Q}.$$

• Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

• Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

• Si calcoli:

$f(6\mathbb{Z}) =$

$g^{-1}(\mathbb{Z}) =$

• Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

• Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva, e perchè.

<u>Esercizio 5.</u> Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 999$ e $b = 600$, e si determinino due coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

<u>Esercizio 6.</u> Si determinino tutti gli interi che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x \equiv \ 4 \pmod 5 \\ 2x \equiv \ 10 \pmod{12} \\ x \equiv \ 6 \pmod 7 \\ |x| \leq 250 \end{cases}$$

<u>Esercizio 7.</u> Si determini il più grande intero positivo che si rappresenta in base 6 con tre cifre tutte distinte, e se ne dia la rappresentazione binaria.

<u>Esercizio 8.</u>

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 6 costituita da tre cifre ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 6 costituita da tre cifre tutte distinte ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono in base 6 una rappresentazione di cinque cifre in cui compare due volte la cifra 1, due volte la cifra 2 e una volta la cifra 3 ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono in base 6 una rappresentazione di cinque cifre in cui compare esattamente quattro volte la cifra 1 ?

<u>Esercizio 9.</u> Quante combinazioni occorrerebbe giocare per al Superenalotto per avere la certezza matematica di realizzare un sei ?

Esercizio 10. Si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ in $\mathbb{N}$ definita ponendo

$$x \sim y \Longleftrightarrow x, y \leq 10, \text{ oppure } 11 \leq x, y \leq 100, \text{ oppure } 101 \leq x, y.$$

• Si calcoli:

$[0]_\sim =$

$[1]_\sim =$

$[15]_\sim =$

$[1000]_\sim =$

• Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $\mathbb{N}/_\sim$?

• Si spieghi per quale motivo l'applicazione

$$f \ : \ [a]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim \ \mapsto \ [a+1]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim$$

non è ben posta.

Esercizio 11. Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A. Si dimostri che, per ogni $a, b \in A$, si ha $[a]_\sim = [b]_\sim \Longleftrightarrow a \sim b$.

Esercizio 12. Si consideri la relazione $\sim$ in $\mathbb{Q}$ definita ponendo

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } xy = 1.$$

Motivando la risposta, si stabilisca se $\sim$ è una relazione di equivalenza.

<u>ESERCIZIO 13.</u> Nell'insieme $A = \{0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,11\}$ dei numeri naturali minori di 12 si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 5a < 2b,$$

dove $<$ indica la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}$.

• Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in A.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \sqsubseteq)$.

• Si stabilisca se $(A, \sqsubseteq)$ è ben ordinato, motivando la risposta.

• Si determinino gli eventuali elementi minimali, elementi massimali, minimo e massimo di $(A, \sqsubseteq)$.

• Si determinino tutti i maggioranti in A del sottoinsieme $\{1, 2\}$.

• Si determini l'estremo superiore in A del sottoinsieme $\{1, 2\}$.

<u>Esercizio 14.</u> Si considerino l'insieme $\mathbb{Z}_6$ e l'operazione $\star$ definita ponendo

$$a \star b = a + b - ab$$

per ogni $a,\ b \in \mathbb{Z}_6$.

• Si compili la tabella moltiplicativa di $(\mathbb{Z}_6, \star)$.

• Si verifichi che $(\mathbb{Z}_6, \star)$ è un monoide commutativo.

• Si determini un sottoinsieme avente ordine 3 che risulti una parte stabile di $(\mathbb{Z}_6, \star)$.

• Si determinino tutti gli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_6, \star)$.

• Si stabilisca se l'applicazione $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ definita ponendo $f(a) = 2a$ per ogni $a \in \mathbb{Z}_6$ è un endomorfismo di semigruppi di $(\mathbb{Z}_6, \star)$.

<u>ESERCIZIO 15.</u> Siano $(G, \perp)$ un gruppo abeliano, e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in G compatibile con $\perp$. Si dimostri che la struttura quoziente $(G/_{\mathcal{R}}, \perp)$ è ancora un gruppo abeliano.

<u>ESERCIZIO 16.</u> Si dia un esempio di semigruppo finito che non sia un monoide.

<u>Esercizio 17.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

<u>Esercizio 18.</u> Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{5,4}(\mathbb{Z}_7).$$

<u>ESERCIZIO 19.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:**

$$\begin{cases} y + 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = 4 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 20.</u> Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$