Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

17 Giugno 2008

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Siano S, T e V insiemi arbitrari, e si denoti con $\subset$ la relazione di inclusione stretta tra insiemi. Motivando la risposta, si stabilisca se è vero che

$$S \subset T,\, S \subset V \Longrightarrow S \subset T \cap V.$$

Esercizio 2. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 4$ risulta

$$4^3 + 5^3 + 6^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 36.$$

<u>ESERCIZIO 3.</u> Motivando la risposta, si stabilisca se la corrispondenza

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x = y - 2\}$$

è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

<u>ESERCIZIO 4.</u> Si considerino le applicazioni

$$f \;:\; x \in \mathbb{N}^\star \;\mapsto\; \frac{2x+1}{x} \in \mathbb{Q}, \qquad g \;:\; x \in \mathbb{Q} \;\mapsto\; \frac{|x|+1}{2} \in \mathbb{Q}.$$

- Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

- Si calcoli:

  $g(\mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}) =$

  $f^{-1}(\{0\,,\,1\,,\,-2\}) =$

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.

<u>ESERCIZIO 5.</u> Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 2912$ e $b = 1505$, e si determinino due coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

<u>ESERCIZIO 6.</u> Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x \equiv \ 3 \pmod 5 \\ 2x \equiv \ 8 \pmod{14} \\ 2x \equiv \ 14 \pmod{18} \\ |x| \leq 600 \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 7.</u> Si determini il più grande intero positivo che si rappresenta in base 5 con quattro cifre di cui almeno tre distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 8.

<u>ESERCIZIO 8.</u>

• Quante sono le colonne del Totocalcio in cui compaiono 6 vittorie in casa (segno "1"), 4 pareggi (segno "X") e 4 vittorie in trasferta (segno "2") ?

<u>ESERCIZIO 9.</u>

• Sia n un intero non negativo. Si dimostri che

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

<u>ESERCIZIO 10.</u> Si consideri in $\mathbb{Z}$ la relazione binaria definita da:

$$a\mathcal{R}b :\iff (a = b) \text{ o } (a, b \in 2\mathbb{N}_0).$$

• Si provi che $\mathcal{R}$ è una relazione d'equivalenza in $\mathbb{Z}$.

• Segnando accanto a ciascuna di esse una V (vero) oppure una F (falso), si precisi se le seguenti affermazioni sono esatte:

$4\,\mathcal{R}\,-6$

$22\,\mathcal{R}\,8$

$23\,\mathcal{R}\,46$

$5\,\mathcal{R}\,5$

$60\,\mathcal{R}\,-20$

$6\,\mathcal{R}\,0$

• Si determini l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

<u>ESERCIZIO 11.</u> Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A. Si dimostri che, per ogni $a, b \in A$, si ha $[a]_\sim \neq [b]_\sim \iff [a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$.

<u>ESERCIZIO 12.</u> Si enunci il *teorema fondamentale dell'aritmetica.*

<u>ESERCIZIO 13.</u> Sia P l'insieme dei numeri primi in $\mathbb{N}_0$, e si consideri l'insieme

$$W = \{p_1p_2, \ | \, p_1, p_2 \in P, p_1 \leq p_2\}.$$

• Si verifichi che è d'ordine la relazione $\sqsubseteq$ definita in W ponendo:

$$p_1p_2 \sqsubseteq q_1q_2 :\Longleftrightarrow \ (p_1 = q_1) \ \text{ e } \ (p_2 \leq q_2),$$

dove il $\leq$ indica la relazione d'ordine usuale in $\mathbb{N}_0$.

• Segnando accanto a ciascuna di esse una V (vero) oppure una F (falso), si precisi se le seguenti affermazioni sono esatte:

$25 \sqsubseteq 26$

$26 \sqsubseteq 25$

$9 \sqsubseteq 46$

$65 \sqsubseteq 65$

$21 \sqsubseteq 33$

$49 \sqsubseteq 91$

$34 \sqsubseteq 38$

$38 \sqsubseteq 34$

• Si precisi se l'insieme ordinato $(W, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, se è ben ordinato, se esistono $\min W$, $\max W$, elementi minimali, elementi massimali.

• Considerati i sottoinsiemi $F = \{39, 49, 77, 187\}$ e $G = \{35, 38, 55, 62\}$ di W, si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(F, \sqsubseteq)$ e $(G, \sqsubseteq)$.

<u>ESERCIZIO 14.</u> Sia $S = \{a, b, c, d\}$. Si definisca nell'insieme $P(S)$ delle parti di S un'operazione binaria $\star$ ponendo

$$A \star B \;=\; (A \cup B) \setminus \{c\}, \quad \forall A, B \in P(S).$$

• Si dimostri che $(P(S), \star)$ è un semigruppo commutativo.

• Si dimostri che $(P(S), \star)$ non è un monoide.

• Si stabilisca se l'insieme $T = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ è una parte stabile di $(P(S), \star)$.

• Considerato l'insieme $V = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}\}$, si dimostri che $(V, \star)$ è un sottosemigruppo di $(P(S), \star)$, e se ne compili la tabella moltiplicativa.

• Si provi che l'applicazione

$$f : \; A \in P(S) \;\mapsto\; A \cap \{a, b\} \;\in P(S)$$

non è un omomorfismo di semigruppi tra $(P(S), \cup)$ e $(P(S), \star)$, dove $\cup$ denota la usuale operazione di unione insiemistica in $P(S)$.

<u>Esercizio 15.</u> Si dimostri che *gli elementi invertibili di un monoide formano un gruppo*.

<u>Esercizio 16.</u> Si dia la definizione di *determinante di una matrice quadrata*.

<u>Esercizio 17.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

<u>Esercizio 18.</u> Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ 9 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}_{11}).$$

<u>Esercizio 19.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:**

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

<u>Esercizio 20.</u> Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7).$$