Matematica Discreta

Gruppo 1 – Dott. C. Delizia

Anno Accademico 2002/2003

Terzo Appello – 9 luglio 2003

Esercizio 1.

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star \star \star \star)_8$?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star \star \star \star)_8$ con cifre tutte distinte ?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star \star \star \star)_8$ con cifre tutte dispari ?

• Qual è il minore di essi ?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star \star \star \star)_8$ con cifre tutte dispari e distinte ?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star \star \star \star)_8$ utilizzando tre volte la cifra 1 e tre volte la cifra 2 ?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 8 nella forma $(1 \star \star \star \star \star)_8$ utilizzando le sole cifre 1 e 2, e ciascuna di esse non piú di quattro volte ?

Esercizio 2. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri $a = 9132$ e $b = 6780$, e si lo si esprima nella forma $d = \alpha a + \beta b$, con α e β interi.

Esercizio 3. Si determini il minimo intero positivo *dispari* a tale che simultaneamente risulti $2a \equiv 14 \pmod{18}$ e $3a \equiv 15 \pmod{33}$.

Esercizio 4. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 3$ risulta

$$(3 \cdot 3 - 5) + (3 \cdot 4 - 5) + (3 \cdot 5 - 5) + \cdots + (3 \cdot n - 5) \;=\; \frac{3n^2 - 7n + 2}{2}.$$

Esercizio 5. Si stabilisca se la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_{11})$$
è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 6. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 3 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 7. Si considerino le applicazioni
$$f \,:\, x \in \mathbb{Q} \;\mapsto\; \tfrac{2}{3}x - 1 \in \mathbb{Q}, \qquad g \,:\, y \in \mathbb{Q} \;\mapsto\; \tfrac{3}{2}(y+1) \in \mathbb{Q}.$$

- Si provi che f è iniettiva.
- Si provi che g è suriettiva.
- Si calcoli:

  $f(3\mathbb{N}) =$

  $f^{-1}(\{1\,,\,2\,,\,3\}) =$

- Si provi che f e g sono l'una l'inversa dell'altra.

Esercizio 8. Si consideri l'operazione $\perp$ definita ponendo $a \perp b \,=\, (a-b)^2$, per ogni $a,\, b \in \mathbb{Z}$.

- Si verifichi se l'operazione $\perp$ è associativa.
- Si verifichi se l'operazione $\perp$ è commutativa.
- Esistono elementi neutri nella struttura $(\mathbb{Z}, \perp)$? Perché ?

Esercizio 9. Sia W l'insieme dei numeri interi positivi ≤ 20. Per ogni $i, j \in W$ si ponga

$$i \mathcal{R} j \iff 4 \text{ divide } i - j.$$

• Si verifichi che $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in W.

• Si descrivano le seguenti classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$:

$[1]_{\mathcal{R}} =$
$[2]_{\mathcal{R}} =$
$[3]_{\mathcal{R}} =$
$[4]_{\mathcal{R}} =$
$[5]_{\mathcal{R}} =$

• Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $W/\mathcal{R}$?

Esercizio 10. Si consideri l'insieme $S = \{a\,,\, b\,,\, c\,,\, d\}$, e sia $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S.

• Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(S)$?

• Si dimostri che $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è un reticolo, dove $\subseteq$ denota la relazione di inclusione insiemistica.

• Nel reticolo $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ si effettuino i seguenti calcoli:

$\{a\,,\, b\,,\, c\} \vee \{a\,,\, d\} =$
$\{a\,,\, b\,,\, c\} \wedge \{a\,,\, d\} =$

• Si verifichi che l'applicazione

$$\phi \;:\; X \in \mathcal{P}(S) \;\mapsto\; |X| \in \mathbb{N}$$

(dove $|X|$ denota l'ordine dell'insieme X) non è un omomorfismo di reticoli tra $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ e $(\mathbb{N}, \leq)$ (dove $\leq$ denota l'ordinamento naturale di $\mathbb{N}$).

• Sia $A = \{X \in \mathcal{P}(S) \;:\; |X| \geq 2\}$. Quanti sono gli elementi di A ?

• Si dimostri che $(A, \subseteq)$ non è un sottoreticolo di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$.

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di A.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \subseteq)$.

• Si stabilisca se $(A, \subseteq)$ è totalmente ordinato, e perché.

• Si verifichi che l'applicazione

$$\sigma \;:\; X \in A \;\mapsto\; |X| \in \mathbb{N}$$

(dove $|X|$ denota l'ordine dell'insieme X) è un omomorfismo di insiemi ordinati tra $(A, \subseteq)$ e $(\mathbb{N}, \leq)$ (dove $\leq$ denota l'ordinamento naturale di $\mathbb{N}$).

• Si provi che l'applicazione σ non è iniettiva.