Matematica Discreta

Gruppo 1 – Gruppo 4

Dott. C. Delizia

Terzo Appello

7 Luglio 2004

Esercizio 1. Si considerino i numeri interi $a = 594$, $b = 363$.

[1.1] Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si calcoli il massimo comun divisore positivo $d = (a, b)$.

[1.2] Si determinino i coefficienti interi α e β che verificano l'uguaglianza $d = \alpha a + \beta b$.

[1.3] Si calcoli il minimo comune multiplo positivo di a e b.

Esercizio 2. Si determinino tutti gli interi aventi valore assoluto minore di 1000 che siano soluzione del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ x \equiv 3 \pmod{11} \\ 2x \equiv 8 \pmod{24} \end{cases}$$

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{13}$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 13:

$$\begin{cases} 11x - 4y = 5 \\ 9x + 2y = 7 \end{cases}$$

Esercizio 4. Siano A l'insieme dei divisori positivi di 20, B l'insieme dei divisori positivi di 25.

[4.1] Si descrivano i seguenti insiemi:

$A =$

$B =$

$A \setminus B =$

$A \triangle B =$

[4.2] Quante sono le possibili applicazioni iniettive di B in A ?

[4.3] Quante sono le possibili applicazioni non suriettive di A in A ?

Esercizio 5. Si dica se la corrispondenza $\mathcal{R} = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \;:\; x - 1 = |y - 3|\}$ è un'applicazione, motivando la risposta.

Esercizio 6. Siano $\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali pari, $\mathbb{N}_d = \{1, 3, 5, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali dispari. Si considerino le applicazioni

$$f : n \in \mathbb{N}_d \longmapsto 2n \in \mathbb{N}_p\,, \qquad g : n \in \mathbb{N}_p \longmapsto |n - 1| \in \mathbb{N}_d.$$

[6.1] Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

[6.2] Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

[6.3] Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

[6.4] Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

[6.5] Si determini l'applicazione composta $f \circ g$.

[6.6] Si stabilisca se $f \circ g$ è iniettiva, e perchè.

[6.7] Si stabilisca se $f \circ g$ è suriettiva, e perchè.

[6.8] Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

[6.9] Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.

[6.10] Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva, e perchè.

[6.11] Si calcoli:

$f(\mathbb{N}_d) =$

$f^{-1}(4\mathbb{N}) =$

$f^{-1}(6\mathbb{N}) =$

$g(\{0\,,\,2\}) =$

$g^{-1}(\{1\,,\,3\,,\,5\}) =$

$(f \circ g)(\{0\,,\,2\}) =$

$(f \circ g)^{-1}(\{0\,,\,2\}) =$

$(g \circ f)^{-1}(\{3\,,\,7\}) =$

<u>ESERCIZIO 7.</u> Si consideri l'applicazione

$$h : x \in \mathbb{Q} \longmapsto \tfrac{1-2x}{4} \in \mathbb{Q}.$$

[7.1] Si dimostri che h è invertibile.

[7.2] Si determini l'applicazione inversa h^{-1}.

<u>ESERCIZIO 8.</u> Sia $\mathbb{Z}_d = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$ l'insieme dei numeri interi dispari. Si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo $a \star b \;=\; a + b - 1$, per ogni a, $b \in \mathbb{Z}_d$.

[8.1] Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}_d, \star)$ è un gruppo abeliano, evidenziando in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Z}_d$.

[8.2] Si dimostri per induzione su n che

$$\underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{n \text{ volte}} \;=\; na - n + a,$$

per ogni $a \in \mathbb{Z}_d$ e per ogni $n \geq 1$.

[8.3] Si dimostri che l'insieme $\mathbb{N}_d = \{1, 3, 5, \dots\}$ dei numeri naturali dispari è un sottomonoide di $(\mathbb{Z}_d, \star)$.

[8.4] Si dimostri che l'applicazione

$$\sigma \;:\; a \in \mathbb{Z} \;\mapsto\; 2a + 1 \in \mathbb{Z}_d$$

è un isomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{Z}, +)$ e $(\mathbb{Z}_d, \star)$.

<u>ESERCIZIO 9.</u> Sia $\mathbb{N}_d = \{2n + 1 \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei numeri naturali dispari. Si consideri la relazione $\sim$ in $\mathbb{N}_d$ definita ponendo

$$2n + 1 \sim 2m + 1 \iff n \equiv m \pmod 5$$

[9.1] Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

[9.2] Si calcoli:

$[1]_\sim =$

$[3]_\sim =$

$[5]_\sim =$

$[7]_\sim =$

$[9]_\sim =$

$[11]_\sim =$

$[13]_\sim =$

[9.3] Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $\dfrac{\mathbb{N}_d}{\sim}$?

<u>Esercizio 10.</u> Sia $\mathbb{N}_d = \{2n+1 \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ l'insieme dei numeri naturali dispari. Si consideri la relazione $\sqsubseteq$ in $\mathbb{N}_d$ definita ponendo

$$2n+1 \sqsubseteq 2m+1 \iff n|m$$

dove $|$ denota la usuale relazione del *divide* tra numeri naturali.

[10.1] Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}_d$.

[10.2] Si stabilisca se $(\mathbb{N}_d, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, e perchè.

[10.3] Si dimostri che $(\mathbb{N}_d, \sqsubseteq)$ è un reticolo.

[10.4] Nel reticolo $(\mathbb{N}_d, \sqsubseteq)$ si effettuino i seguenti calcoli:

$25 \vee 37 =$

$25 \wedge 37 =$

[10.5] Si stabilisca se $(\mathbb{N}_d, \sqsubseteq)$ possiede minimo e massimo, e quali sono.

[10.6] Si dimostri che l'applicazione

$$\phi \,:\, 2n+1 \in \mathbb{N}_d \;\mapsto\; 2n+1 \in \mathbb{N}$$

non è un omomorfismo di insiemi ordinati tra $(\mathbb{N}_d, \sqsubseteq)$ e $(\mathbb{N}, |)$.

[10.7] Sia $S = \{3\,,\,5\,,\,7\,,\,9\,,\,11\,,\,13\}$. Si disegni il diagramma di Hasse di $(S, \sqsubseteq)$.

[10.8] Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di $(S, \sqsubseteq)$.

[10.9] Si determinino gli eventuali estremo inferiore ed estremo superiore dell'insieme $\{5\,,\,7\,,\,11\}$ in $(S, \sqsubseteq)$.