

MATEMATICA DISCRETA

DOTT. C. DELIZIA

TERZO APPELLO

5 LUGLIO 2005

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

Esercizio 1. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 2. Si determini il minimo intero positivo *dispari* a tale che simultaneamente risulti $2a \equiv 6 \pmod{14}$ e $3a \equiv 12 \pmod{15}$.

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_7 , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x + z = 1 \\ y - 3z = 4 \end{cases}$$

Esercizio 4.

- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 5 nella forma $(1 \star \star 3 \star)_5$?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 5 nella forma $(1 \star \star 3 \star)_5$ con cifre tutte distinte?
- Qual è il maggiore di essi?
- Qual è il minore di essi?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 5 nella forma $(1 \star \star 3 \star)_5$ con cifre tutte dispari?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 5 nella forma $(1 \star \star 3 \star)_5$ con cifre tutte dispari e distinte?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 5 nella forma $(1 \star \star 3 \star)_5$ utilizzando tre volte la cifra 1 e due volte la cifra 3?
- Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 5 nella forma $(1 \star \star 3 \star)_5$ utilizzando le sole cifre 1 e 3?

Esercizio 5. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri $a = 135$ e $b = 111$, e si lo si esprima nella forma $d = \alpha a + \beta b$, con α e β interi.

Esercizio 6. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che, per ogni $n \geq 0$, un insieme finito con n elementi ha esattamente 2^n sottoinsiemi.

Esercizio 7. Si considerino le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto 5x - 2 \in \mathbb{Q}, \quad g : y \in \mathbb{Q} \mapsto 3y + 4 \in \mathbb{Q}.$$

- Si provi che f è invertibile, e se ne determini l'inversa.

- Si calcoli:

$$f(\mathbb{N}_d) =$$

$$f^{-1}(\{0\}) =$$

$$f^{-1}(\mathbb{Z}) =$$

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Si determini l'applicazione composta $f \circ g$.

Esercizio 8. Si consideri il gruppo $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$ degli elementi invertibili del monoide (\mathbb{Z}_{10}, \cdot) .

- Si scriva la tabella moltiplicativa di $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$.

- Si stabilisca se $U(\mathbb{Z}_{10})$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}_{10}, +)$.

- Si consideri l'applicazione $\sigma : \mathbb{Z}_2 \rightarrow U(\mathbb{Z}_{10})$ definita ponendo
$$\sigma([0]_2) = [1]_{10}, \quad \sigma([1]_2) = [3]_{10}.$$

Motivando la risposta, si stabilisca se σ è un omomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(U(\mathbb{Z}_{10}), \cdot)$.

Esercizio 9. Si consideri l'insieme $S = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ dei divisori positivi di 50.

• Si dimostri che $(S, |)$ è un reticolo, dove $|$ denota la usuale relazione del *divide* tra numeri naturali.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(S, |)$.

• Si stabilisca se $(S, |)$ è totalmente ordinato, e perchè.

• Si calcoli:

$$\sup_S\{10, 25\} =$$

$$\inf_S\{10, 25\} =$$

• Sia $T = S \setminus \{1, 25\}$. Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di T .