Matematica Discreta

Dott. C. Delizia

13 Luglio 2006

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri $a = 1287$ e $b = 1001$, e si lo si esprima nella forma $d = \alpha a + \beta b$, con α e β interi.

Esercizio 2.

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(3\,5\,\star\,1\,\star)_7$?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(3\,5\,\star\,1\,\star)_7$, con cifre tutte distinte?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(3\,5\,\star\,1\,\star)_7$, con cifre tutte dispari?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(3\,\star\,\star)_7$, con cifre tutte dispari e distinte?

• Quanti sono i numeri naturali che si possono rappresentare in base 7 utilizzando esattamente le cifre del numero $(6\,5\,2)_7$?

• Quanti sono i numeri naturali che si possono rappresentare in base 7 utilizzando esattamente le cifre del numero $(1\,5\,5\,3\,5)_7$?

• Si rappresenti in base 7 il numero 9999.

<u>Esercizio 3.</u> Si determini il massimo intero negativo a che sia soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a \equiv 7 \ (\text{mod. } 10) \\ 2a \equiv 10 \ (\text{mod. } 18) \end{cases}$$

<u>Esercizio 4.</u> Si dica se la corrispondenza $\mathcal{R} = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x = 2y + 1\}$ è un'applicazione, motivando la risposta.

<u>Esercizio 5.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ y + z = 1 \\ 4x + 3y + z = 1 \\ x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Esercizio 6. Si denotino con $\mathbb{N}_p$ ed $\mathbb{N}_d$ gli insiemi dei numeri naturali pari e di quelli dispari, rispettivamente. Si considerino le applicazioni

$$f\ :\ n \in \mathbb{Z} \ \mapsto\ 2|n| + 1 \in \mathbb{N}_d,$$

$$g\ :\ 2m + 1 \in \mathbb{N}_d \ \mapsto\ 2(m + 1) \in \mathbb{N}_p.$$

• Si dica se f è iniettiva, e perché.

• Si dica se f è suriettiva, e perché.

• Si dica se g è iniettiva, e perché.

• Si dica se g è suriettiva, e perché.

• Si determini l'applicazione composta $g \circ f$, e si stabilisca se essa è iniettiva, suriettiva o biettiva, motivando le risposte.

• Si calcoli:

$f(\{\mathbb{N}\}) =$

$f^{-1}(\{7\}) =$

$g(\{1\}) =$

<u>Esercizio 7.</u> Sia $D = \{2z + 1 \, : \, z \in \mathbb{Z}\}$. Si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo

$$(2a+1) \star (2b+1) \; = \; 2(a+b) + 1,$$

per ogni $2a + 1$, $2b + 1 \in D$.

• Si dimostri che la struttura algebrica $(D, \star)$ è un gruppo abeliano.

• Quale è il simmetrico dell'elemento 5 in $(D, \star)$?

• Si dimostri che l'applicazione

$$h \; : \; 2n + 1 \in D \; \mapsto \; n \in \mathbb{Z}$$

è un isomorfismo di gruppi tra $(D, \star)$ e $(\mathbb{Z}, +)$, dove $+$ denota la usuale somma tra numeri interi.

Esercizio 8. Si consideri l'insieme

$$S = \{1\,,\,2\,,\,4\,,\,5\,,\,10\,,\,20\,,\,25\,,\,50\}$$

ordinato con la relazione $|$ indotta dalla relazione del *divide* tra numeri naturali.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(S, |)$.

• Si precisi se $(S, |)$ è totalmente ordinato, e se è ben ordinato.

• Motivando la risposta, si stabilisca se $(S, |)$ è un reticolo.

• Si determinino:

l'insieme degli elementi minimali di S=

$\min(S)$=

l'insieme degli elementi massimali di S=

$\max(S)$=

$\sup_S(\{10\,,\,25\})$=

$\inf_S(\{10\,,\,25\})$=

Esercizio 9. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 11$ risulta

$$22 + 24 + 26 + \cdots + 2n \;=\; n^2 + n - 110.$$