Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

12 Luglio 2007

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Per ogni $a \in \mathbb{Z}$ sia $a\mathbb{Z} = \{ax : x \in \mathbb{Z}\}$. Si dimostri che $a\mathbb{Z} \subseteq b\mathbb{Z} \iff b|a$ (dove $|$ denota la relazione del *divide* tra numeri interi).

Esercizio 2. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 4$ risulta $n! > 2^n$.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Motivando la risposta, si stabilisca se la corrispondenza

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \,:\, x^2 = y^2\}$$

è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$.

<u>ESERCIZIO 4.</u> Si considerino le applicazioni

$$f \;:\; x \in \mathbb{Z} \;\mapsto\; |x| - 3 \in \mathbb{Z}, \qquad g \;:\; x \in \mathbb{Z} \;\mapsto\; 3x - 1 \in \mathbb{Z}.$$

- Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

- Si calcoli:

  $f(3\mathbb{Z}) =$

  $g^{-1}(\mathbb{N}) =$

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

- Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.

- Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva, e perchè.

<u>ESERCIZIO 5.</u> Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 564$ e $b = 456$, e si determinino due coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

<u>ESERCIZIO 6.</u> Si determini il minimo intero positivo che sia soluzione del seguente sistema di equazioni congruenziali lineari:

$$\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{10} \\ 2x \equiv 8 \pmod{22} \\ x \equiv 5 \pmod{13} \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 7.</u> Si determini il più piccolo intero positivo che si rappresenta in base 8 con quattro cifre tutte distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 3.

<u>ESERCIZIO 8.</u>

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 8 costituita da quattro cifre ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 8 costituita da quattro cifre tutte distinte ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono in base 8 una rappresentazione di quattro cifre in cui compare due volte la cifra 0 e due volte la cifra 7 ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono in base 8 una rappresentazione di quattro cifre in cui compare esattamente tre volte la cifra 4 ?

<u>ESERCIZIO 9.</u> Quante combinazioni occorrerebbe giocare per al Totocalcio per avere la certezza matematica di realizzare un quattordici ?

Esercizio 10. Nell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si consideri la relazione $\sim$ definita ponendo

$$(a, b) \sim (a_1, b_1) \Longleftrightarrow a + b_1 = a_1 + b.$$

• Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

• Si calcoli:

$[(0, 0)]_\sim =$

$[(0, 1)]_\sim =$

$[(0, 2)]_\sim =$

$[(1, 0)]_\sim =$

$[(1, 1)]_\sim =$

• Quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/_\sim$?

Esercizio 11. Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A. Si dimostri che, per ogni $a, b \in A$, si ha $[a]_\sim = [b]_\sim \Longleftrightarrow a \sim b$.

Esercizio 12. Si indichi una partizione dell'insieme $\mathbb{N}$ che sia costituita esattamente da 4 elementi.

<u>ESERCIZIO 13.</u> Sia A l'insieme dei divisori positivi di 120.

• Si descriva l'insieme A, elencandone gli elementi.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide*.

• Si dimostri che $(A, |)$ è un reticolo.

• Nel reticolo $(A, |)$ si effettuino i seguenti calcoli:

$(4 \wedge 10) \vee 5 =$

$(8 \vee 5) \wedge 12 =$

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di $A \setminus \{1, 120\}$.

Esercizio 14. Sia S l'insieme costituito dai numeri naturali della forma 2^a7^b, con a, $b \in \mathbb{N}$:

$$S = \{2^a7^b : a, b \in \mathbb{N}\}.$$

Si definisca in S un'operazione binaria $\star$ ponendo

$$2^a7^b \star 2^c7^d = 2^{a+c}7^{bd}.$$

- Si dimostri che $(S, \star)$ è un monoide commutativo, specificandone l'elemento neutro.

- Quali sono gli elementi simmetrizzabili del monoide $(S, \star)$?

- Si provi che l'applicazione $f : 2^a7^b \in S \mapsto a \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di monoidi tra $(S, \star)$ e $(\mathbb{N}, +)$, dove $+$ denota la usuale somma in $\mathbb{N}$.

- Perchè f non è un isomorfismo di monoidi?

- Si provi che l'applicazione $g : 2^a7^b \in S \mapsto b^2 \in \mathbb{N}$ è un omomorfismo di monoidi tra $(S, \star)$ e $(\mathbb{N}, \cdot)$, dove $\cdot$ denota il prodotto usuale in $\mathbb{N}$.

- Si dimostri che l'insieme $T = \{2^a7^b : a, b \in \mathbb{N}_p\}$ è una parte stabile di $(S, \star)$.

- Si dimostri che l'insieme $V = \{2^a7^b : a \in \mathbb{N}_d, b \in \mathbb{N}_p\}$ non è una parte stabile di $(S, \star)$.

<u>Esercizio 15.</u> Siano $(M, \perp)$ un monoide commutativo, e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in M compatibile con $\perp$. Si dimostri che la struttura quoziente $(M/_{\mathcal{R}}, \perp)$ è ancora un monoide commutativo.

<u>Esercizio 16.</u> Si dia un esempio di monoide **finito** non commutativo.

<u>ESERCIZIO 17.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

<u>ESERCIZIO 18.</u> Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Z}_3).$$

<u>Esercizio 19.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$$

<u>Esercizio 20.</u> Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$