Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

15 Luglio 2008

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Siano S, T e V. Motivando la risposta, si stabilisca se è vero che

$$S \cup V \subseteq T \cup V \implies S \subseteq T.$$

Esercizio 2. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che 3 divide $n(n+1)(n+2)$, per ogni $n \geq 0$.

ESERCIZIO 3. Sia $f : S \to T$ un'applicazione iniettiva, e sia X un sottoinsieme di S.
• Si dimostri che $X = f^{-1}(f(X))$.

• Si provi con un controesempio che l'uguaglianza di cui al punto precedente può non valere se f non è iniettiva.

ESERCIZIO 4. Si consideri l'applicazione

$$f \; : \; x \in \mathbb{Q} \; \mapsto \; \frac{3x-5}{4} \in \mathbb{Q}, .$$

Si dimostri che f è invertibile, e se ne determini l'applicazione inversa.

<u>Esercizio 5.</u> Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 552$ e $b = 448$, e si determinino due coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

<u>Esercizio 6.</u> Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x \equiv\ 3 \pmod 4 \\ 2x \equiv\ 12 \pmod{14} \\ 3x \equiv\ 12 \pmod{15} \\ |x| \leq 100 \end{cases}$$

<u>Esercizio 7.</u> Si determini il più piccolo intero positivo che abbia una rappresentazione in base 7 costituita da tre cifre, e se ne dia poi la rappresentazione in base 4.

<u>Esercizio 8.</u>

• Quante sono le differenti bandiere tricolori (del formato di quella italiana) che si possono ottenere utilizzando i colori bianco, rosso, verde e blu?

<u>Esercizio 9.</u>

• Sia n un intero non negativo. Si dimostri che

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Esercizio 10. Considerata la partizione $\mathcal{F} = \{\{2k, 2k+1\} | k \in \mathbb{N}\}$ dell'insieme $\mathbb{N}$, e detta $\mathcal{R}$ la relazione d'equivalenza da essa determinata, si precisi se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa:

$15\,\mathcal{R}\,15$

$23\,\mathcal{R}\,24$

$24\,\mathcal{R}\,25$

$0\,\mathcal{R}\,1$

$6\,\mathcal{R}\,8$

$6\,\mathcal{R}\,9$

$24\,\mathcal{R}\,24$

$25\,\mathcal{R}\,24$

Esercizio 11. Si consideri l'insieme A costituito dai numeri naturali della forma $2^n 3^m$, con $n, m \in \mathbb{N}$:

$$A = \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Si verifichi se la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo:

$$2^n 3^m \,\mathcal{R}\, 2^s 3^t :\iff n + s = m + t$$

è d'equivalenza.

Esercizio 12. Si considerino l'insieme $A = \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{N}\}$ e la relazione $\mathcal{R}$ definita in a ponendo

$$2^n 3^m \,\mathcal{R}\, 2^s 3^t :\iff |n - 3m| = |s - 3t|$$

• Si dimostri che $\mathcal{R}$ è d'equivalenza.

• Si descrivano le seguenti classi di equivalenza:

$[1]_{\mathcal{R}} =$

$[2]_{\mathcal{R}} =$

$[3]_{\mathcal{R}} =$

$[24]_{\mathcal{R}} =$

<u>ESERCIZIO 13.</u> Si considerino l'insieme $A = \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{N}\}$ e la relazione $\mathcal{R}$ definita in a ponendo

$$2^n 3^m \sqsubseteq 2^s 3^t :\Longleftrightarrow (n = s) \text{ e } (m|t),$$

dove $|$ denota la relazione del divide in $\mathbb{N}$.

• Si verifichi che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine.

• Si precisi se l'insieme ordinato $(A, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato.

• Si precisi se l'insieme ordinato $(A, \sqsubseteq)$ è ben ordinato.

• Si precisi se esistono $\min A$, $\max A$, elementi minimali, elementi massimali.

• Considerati i sottoinsiemi $F = \{1, 3, 9\}$ e $G = \{2, 18, 54\}$ di A, si disegnino i diagrammi di Hasse degli insiemi ordinati $(F, \sqsubseteq)$ e $(G, \sqsubseteq)$.

<u>ESERCIZIO 14.</u> Nell'insieme $4\mathbb{Z} = \{4a : a \in \mathbb{Z}\}$ si consideri l'operazione binaria $\perp$ definita ponendo

$$4a \perp 4b = 4ab,$$

per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che la struttura $(4\mathbb{Z}, \perp)$ è un monoide commutativo.

• Si provi che l'applicazione $f : 4a \in 4\mathbb{Z} \mapsto a \in \mathbb{Z}$ è un isomorfismo di monoidi tra $(4\mathbb{Z}, \perp)$ e $(\mathbb{Z}, \cdot)$, dove $\cdot$ denota il prodotto usuale in $\mathbb{Z}$.

• Si determini il gruppo degli elementi invertibili del monoide $(4\mathbb{Z}, \perp)$.

• Si dimostri che il sottoinsieme $8\mathbb{Z} = \{8a : a \in \mathbb{Z}\}$ è una parte stabile di $(4\mathbb{Z}, \perp)$.

ESERCIZIO 15. Si dimostri che *gli elementi invertibili di un monoide formano un gruppo*.

ESERCIZIO 16. Si dia la definizione di *determinante di una matrice quadrata*.

<u>Esercizio 17.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

<u>Esercizio 18.</u> Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{Z}_3).$$

<u>Esercizio 19.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:**

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=4 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$$

<u>Esercizio 20.</u> Si determinino gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$