Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

10 Maggio 2007

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

<u>Esercizio 1.</u> Si consideri l'insieme $A = \{a, b, c, d\}$. Si elenchino tutte le possibili partizioni di A.

<u>Esercizio 2.</u> Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme delle parti di un insieme di ordine n ha ordine 2^n.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Motivando la risposta, si stabilisca se la corrispondenza
$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} \,:\, xy = 2\}$$
è un'applicazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$.

<u>ESERCIZIO 4.</u> Si considerino le applicazioni
$$f \,:\, x \in \mathbb{N} \,\mapsto\, -|x-2| \in \mathbb{Z}, \qquad g \,:\, x \in \mathbb{Z} \,\mapsto\, \tfrac{3}{2}x + 2 \in \mathbb{Q}.$$

• Si stabilisca se f è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

• Si stabilisca se g è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se g è suriettiva, e perchè.

• Si calcoli:

$g(2\mathbb{Z}) =$

$f^{-1}(2\mathbb{Z}) =$

• Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

• Si stabilisca se $g \circ f$ è iniettiva, e perchè.

• Si stabilisca se $g \circ f$ è suriettiva, e perchè.

<u>Esercizio 5.</u> Utilizzando l'algoritmo euclideo, si verifichi che i numeri interi $a = 751$ e $b = 400$ sono coprimi, e si determinino i coefficienti interi α e β tali che $1 = \alpha a + \beta b$.

<u>Esercizio 6.</u> Si determinino tutti gli interi che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ 2x \equiv 8 \pmod{10} \\ x \equiv 7 \pmod{9} \\ |x| \leq 200 \end{cases}$$

<u>Esercizio 7.</u> Si determini il più piccolo intero positivo che si rappresenta in base 5 con 5 cifre tutte distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 9.

<u>Esercizio 8.</u>

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 5 costituita da tre cifre ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono una rappresentazione in base 5 costituita da tre cifre tutte distinte ?

• Quanti sono i numeri naturali che ammettono in base 5 una rappresentazione di tre cifre in cui compare due volte la cifra 1 e una volta la cifra 2 ?

• Quanti e quali sono i numeri naturali che ammettono in base 5 una rappresentazione di tre cifre in cui compare due volte la cifra 1 e una volta la cifra 0 ?

<u>Esercizio 9.</u> Si considerino un insieme A con 2 elementi, ed un insieme B con 3 elementi. Motivando la risposta, si dica se tra le applicazioni di A in B sono in numero maggiore quelle iniettive oppure quelle non iniettive.

Esercizio 10. Si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ in $\mathbb{Z}$ definita ponendo

$$x \sim y \iff x^2 = y^2.$$

• Si calcoli:

$[0]_\sim =$

$[1]_\sim =$

$[-1]_\sim =$

$[2]_\sim =$

• Si descriva l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/_\sim$.

• Si spieghi per quale motivo l'applicazione

$$f \ : \ [a]_\sim \in \mathbb{Z}/_\sim \ \mapsto \ [a+1]_\sim \in \mathbb{Z}/_\sim$$

non è ben posta.

Esercizio 11. Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A. Si dimostri che, per ogni $a, b \in A$, si ha $[a]_\sim = [b]_\sim \iff a \sim b$.

Esercizio 12. Si consideri la relazione $\sim$ in $\mathbb{N}^\star$ definita ponendo

$$x \sim y \iff x = y \text{ oppure } xy \text{ è pari.}$$

Motivando la risposta, si stabilisca se $\sim$ è una relazione di equivalenza.

<u>ESERCIZIO 13.</u> Sia $A = \{1\,, 2\,, 3\,, 4\,, 5\,, 42\,, 84\,, 210\}$.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide*.

• Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è un insieme totalmente ordinato.

• Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è un insieme ben ordinato.

• Motivando la risposta, si stabilisca se $(A, |)$ è un reticolo.

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di A.

• Si calcoli:

$\sup_A\{2, 5\} =$

$\sup_A\{3, 4\} =$

$\inf_A\{4, 42\} =$

$\inf_A\{3, 4\} =$

<u>Esercizio 14.</u> Si considerino l'insieme $B = \{1, 2, 3\}$ e l'operazione $\star$ definita ponendo

$$a \star b = \text{numero delle cifre di } a^b$$

per ogni a, $b \in B$.

- Si compili la tabella moltiplicativa di $(B, \star)$.

- Si verifichi che $(B, \star)$ è un semigruppo commutativo.

- Si stabilisca se il sottoinsieme $\{2, 3\}$ è una parte stabile di $(B, \star)$.

- Si verifichi che $(B, \star)$ non è un monoide.

- Si stabilisca se l'applicazione $f : B \to B$ definita ponendo

$$\begin{cases} f(1) = f(2) = 1 \\ \qquad\quad f(3) = 2 \end{cases}$$

è un endomorfismo di semigruppi di $(B, \star)$.

<u>ESERCIZIO 15.</u> Siano $(G, \perp)$ un gruppo abeliano, e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in G compatibile con $\perp$. Si dimostri che la struttura quoziente $(G/_{\mathcal{R}}, \perp)$ è ancora un gruppo abeliano.

<u>ESERCIZIO 16.</u> Si dia un esempio di monoide finito che non sia un gruppo.

<u>Esercizio 17.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

<u>Esercizio 18.</u> Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,5}(\mathbb{Z}_3).$$

<u>Esercizio 19.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:**

$$\begin{cases} y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

<u>Esercizio 20.</u> Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$