

MATEMATICA DISCRETA

GRUPPO 1

DOTT. C. DELIZIA

APPELLO DI NOVEMBRE

28 NOVEMBRE 2005

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

ESERCIZIO 1. Siano A , B e C insiemi. Si dimostri che $A \cap B \subseteq C \implies (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = \emptyset$.

ESERCIZIO 2. Sia $f : A \longrightarrow B$ un'applicazione. Si dimostri che:

• $B_1 \subseteq B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$, per ogni $B_1, B_2 \subseteq B$;

• in generale, non è vero che $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2) \implies B_1 \subseteq B_2$, per ogni $B_1, B_2 \subseteq B$;

• se f è suriettiva, allora $B_1 \subseteq B_2 \iff f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$, per ogni $B_1, B_2 \subseteq B$.

ESERCIZIO 3. Per ciascuna delle seguenti corrispondenze tra \mathbb{Z} e \mathbb{Q} , si stabilisca se essa è un'applicazione, motivando la risposta.

- $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} : x = \frac{1}{y}\};$

- $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} : 3x = 2|y|\};$

- $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q} : 3|x| = 2y\}.$

ESERCIZIO 4. Si consideri l'applicazione $f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{1-3x}{2} \in \mathbb{Q}$.

Si stabilisca se f è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

ESERCIZIO 6. Si determinino quoziente e resto della divisione euclidea di -31 per 7 .

ESERCIZIO 7. Si determinino tutti gli interi x che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali, e tali che $|x| < 50$:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{7} \\ 5x \equiv 15 \pmod{20} \\ 2 \equiv x \pmod{3} \end{cases}$$

Esercizio 8. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_5 , esprimendo le soluzioni con numeri interi non negativi minori di 5 :

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 9. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 4$ risulta

$$7 + 9 + 11 + \cdots + (2n - 1) = n^2 - 9.$$

ESERCIZIO 10.

- Quante differenti parole, non necessariamente di senso compiuto, è possibile ottenere utilizzando tutte le lettere della parola VELA?
- Quante differenti parole, non necessariamente di senso compiuto, è possibile ottenere utilizzando tutte le lettere della parola CAMICIA?
- Quante differenti parole, non necessariamente di senso compiuto, è possibile ottenere utilizzando 3 lettere tra quelle della parola BANCO?

ESERCIZIO 11. Sia $A = \{a, b, c, d\}$. Nell'insieme A si consideri la relazione

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}.$$

- Si stabilisca se \mathcal{R} è riflessiva, motivando la risposta.
- Si stabilisca se \mathcal{R} è simmetrica, motivando la risposta.
- Si stabilisca se \mathcal{R} è transitiva, motivando la risposta.

Esercizio 12. Nell'insieme $2\mathbb{Z} = \{2a : a \in \mathbb{Z}\}$ dei numeri interi pari si definisca un'operazione binaria \star ponendo

$$2a \star 2b = 2ab, \quad \forall 2a, 2b \in 2\mathbb{Z}.$$

- Si dimostri che $(2\mathbb{Z}, \star)$ è un monoide commutativo.

- Si dimostri che $(2\mathbb{Z}, \star)$ non è un gruppo.

- Si stabilisca se l'insieme $3\mathbb{Z} = \{3a : a \in \mathbb{Z}\}$ è una parte stabile di $(2\mathbb{Z}, \star)$.

- Si stabilisca se l'insieme $4\mathbb{Z} = \{4a : a \in \mathbb{Z}\}$ è una parte stabile di $(2\mathbb{Z}, \star)$.

- Si stabilisca se l'applicazione $f : a \in \mathbb{Z} \mapsto 2a \in 2\mathbb{Z}$ è un omomorfismo di monoidi tra (\mathbb{Z}, \cdot) e $(2\mathbb{Z}, \star)$, dove \cdot denota la usuale operazione di prodotto in \mathbb{Z} .

- Nell'insieme $2\mathbb{Z}$ si consideri la relazione \sim definita ponendo

$$2a \sim 2b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{3}$$
 Si verifichi se \sim è una relazione d'equivalenza, compatibile con l'operazione binaria \star in $2\mathbb{Z}$.

