Matematica Discreta

Gruppo 1 – Dott. C. Delizia

Anno Accademico 2002/2003

Quarto Appello – 17 settembre 2003

Esercizio 1.

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(2 \star \star \star \star)_7$?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(2 \star \star \star \star)_7$ con cifre tutte distinte ?

• Qual è il minore di essi ?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(2 \star \star \star \star)_7$ con cifre tutte pari ?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(2 \star \star \star \star)_7$ con cifre tutte pari e distinte ?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(2 \star \star \star \star)_7$ utilizzando due volte la cifra 1 e tre volte la cifra 2 ?

• Quanti sono i numeri naturali che si rappresentano in base 7 nella forma $(2 \star \star \star \star)_7$ utilizzando le sole cifre 1 e 2, e ciascuna di esse non piú di quattro volte ?

Esercizio 2. Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri $a = 3410$ e $b = 1111$, e si lo si esprima nella forma $d = \alpha a + \beta b$, con α e β interi.

Esercizio 3. Si determini il massimo intero negativo a tale che simultaneamente risulti $6a \equiv 42 \pmod{54}$ e $a \equiv 15 \pmod{7}$.

Esercizio 4. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 9$ risulta

$$9 + 10 + 11 + \cdots + n = \frac{n^2 + n - 72}{2}.$$

Esercizio 5. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_5)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 6. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{11}$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 11:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 5 \\ 2x + 8y = 6 \end{cases}$$

Esercizio 7. Si considerino le applicazioni

$$f \,:\, z \in 6\mathbb{N} \;\mapsto\; \tfrac{z}{6} + 1 \in \mathbb{N}^*, \qquad g \,:\, t \in \mathbb{N}^* \;\mapsto\; (6t)^2 \in 36\mathbb{N}^*.$$

• Si provi che f è biettiva.

• Si determini l'inversa di f.

• Si dimostri che g non è biettiva.

• Si calcoli:

$f(12\mathbb{N}) =$
$f^{-1}(\{1\,,\,2\,,\,4\,,\,6\}) =$
$g(\{1\,,\,3\,,\,4\,,\,5\} =$
$g^{-1}(36\mathbb{N}^*) =$

• Si determini la composta $g \circ f$.

Esercizio 8. Si consideri l'operazione $\perp$ definita ponendo $a \perp b \;=\; a + b - 10$, per ogni $a,\, b \in \mathbb{Z}$. Si verifichi che $(\mathbb{Z}, \perp)$ è un gruppo abeliano, specificandone in particolare l'elemento neutro e il simmetrico di ciascun elemento.

Esercizio 9. Sia W l'insieme dei numeri interi della forma $4h + 1$, con $h \in \mathbb{Z}$:

$$W = \{4h + 1 \,:\, h \in \mathbb{Z}\}.$$

• Si verifichi che W è una parte stabile di $(\mathbb{Z}, \cdot)$, ma non di $(\mathbb{Z}, +)$.

• Si verifichi che la relazione $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$(4h + 1)\,\mathcal{R}\,(4k + 1) \Longleftrightarrow h - k \in 9\mathbb{Z}$$

è di equivalenza in W.

• Si descrivano le seguenti classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$:

$[1]_{\mathcal{R}} =$
$[9]_{\mathcal{R}} =$
$[13]_{\mathcal{R}} =$
$[-23]_{\mathcal{R}} =$

Esercizio 10. Sia A l'insieme dei divisori positivi di 40.

• Si descriva l'insieme A, elencandone gli elementi.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide*.

• Si dimostri che $(A, |)$ è un reticolo.

• Nel reticolo $(A, |)$ si effettuino i seguenti calcoli:

$(4 \wedge 10) \vee 5 =$
$(2 \vee 5) \wedge 8 =$

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di A.