Matematica Discreta

Gruppo 1 – Gruppo 4

Dott. C. Delizia

Quarto Appello

15 Settembre 2004

Esercizio 1. Si determinino un intero positivo ed un intero negativo che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} x \equiv\ 5 \pmod 7 \\ x \equiv\ 7 \pmod 8 \\ x \equiv\ 8 \pmod 5 \end{cases}$$

Esercizio 2. Si determini il più grande intero positivo che si rappresenta in base 7 con 4 cifre di cui almeno 3 distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 8.

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{19}$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 19:**

$$\begin{cases} 5x + 6y + 3z = 1 \\ 8x + 9y + z = 2 \\ x + z = 7 \end{cases}$$

Esercizio 4. Siano A un insieme di ordine 7, e B un insieme di ordine 5.

- Quante sono le possibili applicazioni iniettive di A in B ?
- Quante sono le possibili applicazioni iniettive di B in A ?
- Quante sono le possibili applicazioni non iniettive di A in B ?
- Quante sono le possibili applicazioni non iniettive di B in A ?

Esercizio 5. Si dia un esempio di applicazione di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$ che risulti iniettiva ma non suriettiva, **provando tutto quanto affermato**.

Esercizio 6. Si dia un esempio di applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ che risulti suriettiva ma non iniettiva, **provando tutto quanto affermato**.

<u>ESERCIZIO 7.</u> Si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo $a \star b = a + b + 9$, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.
• Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$ è un gruppo abeliano, **evidenziando in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Z}$.**
• Si dimostri per induzione su n che

$$\underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{n \text{ volte } \star} = n(a+9) + a,$$

per ogni $a \in \mathbb{Z}$ e per ogni $n \geq 1$.
• Si dimostri che l'applicazione

$$\sigma \,:\, a \in \mathbb{N} \;\mapsto\; a - 9 \in \mathbb{Z}$$

è un omomorfismo di monoidi tra $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{Z}, \star)$.

<u>ESERCIZIO 8.</u> Si consideri la relazione $\sim$ in $\mathbb{N}$ definita ponendo

$$x \sim y \iff \text{l'ultima cifra di } x \text{ è uguale all'ultima cifra di } y\ .$$

• Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.
• Si calcoli:
$[0]_\sim =$
$[1]_\sim =$
$[2]_\sim =$
$[3]_\sim =$
$[4]_\sim =$
• Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $\mathbb{N}/_\sim$?
• Si dimostri che l'assegnazione $\omega \,:\, [a]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim \;\mapsto\; [2a]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim$ definisce un'applicazione.
• Si dimostri che ω non è iniettiva.

<u>ESERCIZIO 9.</u> Nell'insieme $\mathbb{N}^*$ dei numeri naturali positivi si consideri la relazione $\sqsubseteq$ definita ponendo

$$n \sqsubseteq m \;\Leftrightarrow\; n - 1 \mid m - 1,$$

dove $\mid$ è la relazione del *divide* in $\mathbb{N}$.
• Si dimostri che $\sqsubseteq$ è una relazione d'ordine in $\mathbb{N}^*$.
• Si precisi se $(\mathbb{N}^*, \sqsubseteq)$ è totalmente ordinato, e perché.
• Si specifichi se esistono, e quali sono, il minimo ed il massimo di $(\mathbb{N}^*, \sqsubseteq)$.
• Si disegni il diagramma di Hasse del sottoinsieme $T = \{2\,, 3\,, 4\,, 5\,, 6\,, 7\,, 8\,, 9\}$ di $(\mathbb{N}^*, \sqsubseteq)$.
• Si specifichi se $(T, \sqsubseteq)$ è un reticolo, e perché.
• Si specifichi quali sono gli eventuali elementi massimali di $(T, \sqsubseteq)$.