Matematica Discreta

Dott. C. Delizia

Quarto Appello

20 Settembre 2005

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

Esercizio 1. Si stabilisca se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

Esercizio 2. Si determini il massimo intero negativo *dispari* a tale che simultaneamente risulti $3a \equiv 9 \pmod{15}$ e $4a \equiv 16 \pmod{36}$.

Esercizio 3. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$, esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 5:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ x + 3z = 3 \end{cases}$$

<u>Esercizio 4.</u> Siano A l'insieme dei divisori di -4, B l'insieme dei divisori di 6.
• Elencandone gli elementi, si descrivano gli insiemi A, B e $A \triangle B$.

• Quante sono le possibili applicazioni iniettive di A in B ?

• Quante sono le possibili applicazioni non iniettive di A in B ?

• Quante sono le possibili applicazioni iniettive di B in A ?

• Quanti sono i sottoinsiemi di B aventi ordine 4 ?

• Quante diverse sestuple ordinate si possono ottenere disponendo in tutti i modi possibili i valori assoluti degli elementi di A ?

<u>Esercizio 5.</u> Utilizzando l'algoritmo di Euclide, si determini il massimo comune divisore positivo d dei numeri $a = 258$ e $b = 134$, e si lo si esprima nella forma $d = \alpha a + \beta b$, con α e β interi.

Esercizio 6. Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che, per ogni $n \geq 5$, si ha:

$$5 + 6 + \dots n = \frac{n^2 + n - 20}{2}.$$

Esercizio 7. Si considerino le applicazioni

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto 5 - 4x \in \mathbb{Q}, \qquad g : y \in \mathbb{Q} \mapsto 2y + 4 \in \mathbb{Q}.$$

• Si provi che f è invertibile, e se ne determini l'inversa.

• Si calcoli:

$g(\mathbb{N}_p) =$

$f^{-1}(\{0\}) =$

$g^{-1}(\mathbb{Z}) =$

• Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

• Si determini l'applicazione composta $f \circ g$.

<u>Esercizio 8.</u> Si consideri il gruppo $(U(\mathbb{Z}_9), \cdot)$ degli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_9, \cdot)$.

• Si scriva la tabella moltiplicativa di $(U(\mathbb{Z}_9), \cdot)$.

• Si stabilisca se $U(\mathbb{Z}_9)$ è una parte stabile di $(\mathbb{Z}_9, +)$.

• Si consideri l'applicazione $\sigma : \mathbb{Z}_2 \to U(\mathbb{Z}_9)$ definita ponendo

$$\sigma([0]_2) = [1]_9, \qquad \sigma([1]_2) = [2]_9.$$

Motivando la risposta, si stabilisca se σ è un omomorfismo di gruppi tra $(\mathbb{Z}_2, +)$ e $(U(\mathbb{Z}_9), \cdot)$.

<u>Esercizio 9.</u> Si consideri l'insieme $S = \{1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\}$, e sia $\mathcal{P}(S)$ l'insieme delle parti di S.

• Quanti sono gli elementi di $\mathcal{P}(S)$?

• Nel reticolo $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ (dove $\subseteq$ denota la relazione di inclusione insiemistica) si effettuino i seguenti calcoli:

$sup_{\mathcal{P}(S)}(\{1\,,\,2\}, \{1\,,\,3\}) =$

$inf_{\mathcal{P}(S)}(\{1\,,\,2\}, \{1\,,\,3\}) =$

• Sia $A = \{X \in \mathcal{P}(S) \,:\, |X| \leq 2\}$. Quanti e quali sono gli elementi di A ?

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di A.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, \subseteq)$.

• Si stabilisca se $(A, \subseteq)$ è totalmente ordinato, e perché.