Matematica Discreta

Gruppo 1

Dott. C. Delizia

19 Settembre 2006

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

<u>Esercizio 1.</u> Si determinino il più piccolo intero positivo e il più grande intero negativo che siano soluzioni del seguente sistema di equazioni congruenziali:

$$\begin{cases} 2x \equiv 10 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 2.</u> Si determini il più grande intero positivo che si rappresenta in base 9 con 3 cifre di cui almeno 2 distinte, e se ne dia la rappresentazione in base 8.

<u>ESERCIZIO 3.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_{13}$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 13:**

$$\begin{cases} 5x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Esercizio 4.

- Quante sono le possibili applicazioni iniettive di $\mathbb{Z}_6$ in $\mathbb{Z}_4$?

- Quante sono le possibili applicazioni iniettive di $\mathbb{Z}_4$ in $\mathbb{Z}_6$?

- Quante sono le possibili applicazioni non iniettive di $\mathbb{Z}_6$ in $\mathbb{Z}_4$?

- Quante sono le possibili applicazioni non iniettive di $\mathbb{Z}_4$ in $\mathbb{Z}_6$?

Esercizio 5. Si considerino le applicazioni

$$f \,:\, x \in \mathbb{Q} \;\mapsto\; \tfrac{2}{3}x - 1 \in \mathbb{Q}, \qquad g \,:\, y \in \mathbb{Q} \;\mapsto\; \tfrac{1}{4}(y+1) \in \mathbb{Q}.$$

- Si provi che f è iniettiva.

- Si provi che g è suriettiva.

- Si calcoli:

  $f(3\mathbb{N}) =$

  $f^{-1}(\{1\,,\,2\,,\,5\}) =$

- Si stabilisca se f è invertibile, ed in caso affermativo se ne determini l'inversa.

- Si determini l'applicazione composta $g \circ f$.

<u>ESERCIZIO 6.</u> Si consideri l'operazione $\star$ definita ponendo $a \star b = a + b - 3$, per ogni a, $b \in \mathbb{Z}$.

• Si dimostri che la struttura algebrica $(\mathbb{Z}, \star)$ è un gruppo abeliano, **evidenziando in particolare qual è l'elemento neutro e qual è il simmetrico di ciascun elemento $a \in \mathbb{Z}$.**

• Si dimostri per induzione su n che

$$\underbrace{a \star a \star \cdots \star a}_{n \text{ volte } \star} = n(a-3) + a,$$

per ogni $a \in \mathbb{Z}$ e per ogni $n \geq 1$.

• Si dimostri che l'applicazione

$$\sigma \,:\, a \in \mathbb{N} \mapsto a + 3 \in \mathbb{Z}$$

è un omomorfismo di monoidi tra $(\mathbb{N}, +)$ e $(\mathbb{Z}, \star)$.

<u>Esercizio 7.</u> Si consideri la relazione $\sim$ in $\mathbb{N}$ definita ponendo

$$x \sim y \iff \text{ la più grande delle cifre di } x \text{ è uguale alla più grande delle cifre di } y\ .$$

- Si dimostri che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

- Si calcoli:

  $[0]_\sim =$

  $[1]_\sim =$

  $[2]_\sim =$

  $[3]_\sim =$

  $[4]_\sim =$

- Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente $\mathbb{N}/_\sim$?

- Si spieghi per quale motivo **non** si può definire un'applicazione mediante la posizione

$$\omega\ :\ [a]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim\ \mapsto\ [a+1]_\sim \in \mathbb{N}/_\sim .$$

<u>ESERCIZIO 8.</u> Sia A l'insieme dei divisori positivi di 30.

- Si descriva l'insieme A, elencandone gli elementi.

- Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide*.

- Si dimostri che $(A, |)$ è un reticolo.

- Nel reticolo $(A, |)$ si effettuino i seguenti calcoli:

  $(2 \wedge 3) \vee 5 =$

  $(2 \vee 3) \wedge 5 =$

- Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di $A \setminus \{1\,,\,30\}$.