Matematica Discreta

Classe 1

Dott. C. Delizia

12 Settembre 2007

Cognome ____________________ Nome ____________________

Matricola ____________________

<u>Esercizio 1.</u> Si dica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera oppure falsa, motivando la risposta:

• $2 \in 3\mathbb{Z}$

• $2 \in 4\mathbb{Z}$

• $-4 \in 2\mathbb{Z}$

• $-2 \in 2\mathbb{Z}$

• $2\mathbb{Z} \subseteq 4\mathbb{Z}$

• $4\mathbb{Z} \subseteq 2\mathbb{Z}$

• $3\mathbb{Z} \cap 4\mathbb{Z} = \emptyset$

<u>Esercizio 2.</u> Utilizzando il principio di induzione, si dimostri che per ogni $n \geq 2$ risulta

$$1 + 4n < 5^n.$$

<u>Esercizio 3.</u> Motivando la risposta, si stabilisca se la corrispondenza

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x = y^2\}$$

è un'applicazione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

<u>Esercizio 4.</u> Si considerino gli insiemi

$$A = \{a, b, c, d\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

• Esplicitando l'immagine di ogni elemento di A, si costruisca un'applicazione iniettiva f di A in B:

$f(a) =$
$f(b) =$
$f(c) =$
$f(d) =$

• Si stabilisca se f è suriettiva, e perchè.

• Si calcoli:

$f(\{c, d\}) =$
$f^{-1}(\{4, 5\}) =$

• Esplicitando l'immagine di ogni elemento di A, si costruisca un'applicazione <u>non</u> iniettiva g di A in B:

$g(a) =$
$g(b) =$
$g(c) =$
$g(d) =$

• È possibile costruire un'applicazione suriettiva di A in B ? Perché ?

<u>ESERCIZIO 5.</u> Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 788$ e $b = 552$, e si determinino due coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

<u>ESERCIZIO 6.</u> Si determinino tutte le soluzioni intere del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 3x \equiv 15 \pmod{18} \\ 2x \equiv 4 \pmod{14} \\ x \equiv 3 \pmod{5} \\ |x| \leq 300 \end{cases}$$

ESERCIZIO 7. Si determini il più grande intero positivo che si rappresenta in base 5 con quattro cifre tutte distinte, e se ne dia la rappresentazione binaria.

ESERCIZIO 8.

• Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono scrivere utilizzando le lettere della parola SCRITTORE ?

• Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono scrivere utilizzando le lettere della parola SCRIVANO ?

ESERCIZIO 9.

• Al gioco del Lotto, quanti sono tutti i possibili ambi con i numeri compresi tra 81 e 90 ?

• Al gioco del Totocalcio, quante sono tutte le possibili colonne che presentano sette segni 1, quattro segni X e tre segni 2 ?

<u>ESERCIZIO 10.</u> Sia $\mathbb{Z}^\star = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Nell'insieme $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^\star$ si consideri la relazione $\sim$ definita ponendo

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

• Si verifichi che $\sim$ è una relazione di equivalenza in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$.

• Si calcoli:

$[(0, 1)]_\sim =$

$[(0, 2)]_\sim =$

$[(1, 1)]_\sim =$

$[(2, 2)]_\sim =$

$[(1, 2)]_\sim =$

$[(2, 4)]_\sim =$

• Quanti sono gli elementi dell'insieme quoziente $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star)/_\sim$?

<u>ESERCIZIO 11.</u> Sia $\sim$ una relazione di equivalenza in un insieme A. Si dimostri che, per ogni $a, b \in A$, si ha $[a]_\sim = [b]_\sim \iff a \sim b$.

<u>ESERCIZIO 12.</u> Si indichi una partizione dell'insieme $\mathbb{Z}$ che sia costituita esattamente da 5 elementi.

<u>Esercizio 13.</u> Sia A l'insieme dei divisori positivi di 88.

• Si descriva l'insieme A, elencandone gli elementi.

• Si disegni il diagramma di Hasse di $(A, |)$, dove $|$ denota la relazione del *divide*.

• Si dimostri che $(A, |)$ è un reticolo.

• Nel reticolo $(A, |)$ si effettuino i seguenti calcoli:

$(4 \wedge 22) \vee 11 =$

$(4 \vee 22) \wedge 11 =$

• Si determinino gli eventuali elementi minimali e massimali, minimo e massimo di $A \setminus \{1, 22, 88\}$.

<u>ESERCIZIO 14.</u> Si considerino l'insieme $\mathbb{Z}_5$ e l'operazione $\star$ definita ponendo

$$a \star b = a + b - ab$$

per ogni a, $b \in \mathbb{Z}_5$.

• Si compili la tabella moltiplicativa di $(\mathbb{Z}_5, \star)$.

• Si verifichi che $(\mathbb{Z}_5, \star)$ è un monoide commutativo.

• Si determini un sottoinsieme avente ordine 4 che risulti una parte stabile di $(\mathbb{Z}_5, \star)$.

• Si determinino tutti gli elementi invertibili del monoide $(\mathbb{Z}_5, \star)$.

• Si stabilisca se l'applicazione $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$ definita ponendo $f(a) = 2a$ per ogni $a \in \mathbb{Z}_5$ è un endomorfismo di monoidi di $(\mathbb{Z}_5, \star)$.

<u>Esercizio 15.</u> Siano $(M, \perp)$ un monoide commutativo, e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in M compatibile con $\perp$. Si dimostri che la struttura quoziente $(M/_{\mathcal{R}}, \perp)$ è ancora un monoide commutativo.

<u>Esercizio 16.</u> Si dia un esempio di monoide **finito** non commutativo.

<u>Esercizio 17.</u> Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1}, e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

<u>Esercizio 18.</u> Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Z}_3).$$

<u>ESERCIZIO 19.</u> Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{Z}_7$, **esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:**

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 5x + 2y + 3z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

<u>ESERCIZIO 20.</u> Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q}).$$