

MATEMATICA DISCRETA

CLASSE 1

DOTT. C. DELIZIA

17 SETTEMBRE 2008

Cognome _____ Nome _____

Matricola _____

ESERCIZIO 1. Con A , B e C insiemi, si provi che

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

ESERCIZIO 2. Si dimostri, per induzione su n , che per ogni $n \geq 4$ risulta:

$$4^3 + 5^3 + 6^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 36.$$

Esercizio 3. Siano A e B insiemi finiti dello stesso ordine n . Si provi che un'applicazione $f : A \longrightarrow B$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione

$$f : x \in \mathbb{Q} \mapsto \frac{22x + 5}{9} \in \mathbb{Q}.$$

Si dimostri che f è invertibile, e se ne determini l'applicazione inversa.

ESERCIZIO 5. Utilizzando l'algoritmo euclideo, si calcoli il massimo comun divisore positivo d tra i numeri interi $a = 803$ e $b = 1232$, e si determinino due coefficienti interi α e β tali che $d = \alpha a + \beta b$.

ESERCIZIO 6. Si determinino tutti gli interi che siano soluzione del seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \equiv 6 \pmod{10} \\ 5x \equiv 30 \pmod{35} \\ 14x \equiv 21 \pmod{28} \\ -200 \leq x \leq 300 \end{array} \right.$$

ESERCIZIO 7. Si determini il più piccolo intero positivo che abbia una rappresentazione in base 8 costituita da 3 cifre pari a due a due distinte, e se ne dia poi la rappresentazione in base 5.

ESERCIZIO 8. Quante parole, non necessariamente di senso compiuto, si possono formare utilizzando quattro lettere distinte della parola MATEMATICA?

ESERCIZIO 9. Sia A un insieme finito di ordine n . Si dimostri che il numero delle applicazioni biettive di A in A è $n!$.

ESERCIZIO 10. Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, B l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A aventi ordine 2. Si consideri la relazione \sim definita ponendo

$$\{a, b\} \sim \{c, d\} \iff a + b = c + d$$

per ogni $\{a, b\}, \{c, d\} \in B$.

- Si verifichi che \sim è una relazione di equivalenza in B .

- Si calcoli:

$$[\{1, 2\}]_{\sim} =$$

$$[\{1, 3\}]_{\sim} =$$

$$[\{1, 4\}]_{\sim} =$$

$$[\{2, 3\}]_{\sim} =$$

- Quanti e quali sono gli elementi dell'insieme quoziente B/\sim ?

ESERCIZIO 11. Si indichi una partizione di \mathbb{Q} costituita da tre sottoinsiemi, di cui 2 infiniti e uno finito.

ESERCIZIO 12. Nell'insieme $A = \{a, b, c\}$ si consideri la relazione $\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c)\}$. Si stabilisca se \mathcal{R} è riflessiva, simmetrica, transitiva.

ESERCIZIO 13. Si consideri la relazione \sqsubseteq definita nell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ponendo

$$a \sqsubseteq b \iff a = b \text{ oppure } 5a \leq 2b,$$

dove \leq denota l'ordine usuale in \mathbb{N} .

- Si verifichi che \sqsubseteq è una relazione d'ordine in A .
- Si disegni il diagramma di Hasse di (A, \sqsubseteq) .
- Si determinino gli eventuali minimo, massimo, elementi minimali, elementi massimali di (A, \sqsubseteq) .
- Si stabilisca se (A, \sqsubseteq) è totalmente ordinato, e perchè.
- Qual è l'estremo inferiore del sottoinsieme $\{5, 6\}$ in (A, \sqsubseteq) ?
- Si stabilisca se l'insieme ordinato (A, \sqsubseteq) è un reticolo, e perché.

ESERCIZIO 14. Si dia la definizione di *campo*, un esempio di campo infinito, e un esempio di campo finito.

ESERCIZIO 15. Si enunci il *principio d'induzione*.

ESERCIZIO 16. Si dia la definizione di *rango* di una matrice.

ESERCIZIO 17. Si verifichi che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_7)$$

è invertibile, se ne determini la matrice inversa A^{-1} , e si calcoli il determinante $|A^{-1}|$.

ESERCIZIO 18. Si determini il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{Z}_5).$$

ESERCIZIO 19. Utilizzando il metodo di Cramer, si risolva il seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti in \mathbb{Z}_7 , esprimendo i risultati con numeri interi non negativi minori di 7:

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 2 \\ 3x + 2z = 4 \\ 2x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

ESERCIZIO 20. Si determinino tutti gli autovalori (ed i corrispondenti autovettori) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_7).$$