Sistemi lineari omogenei

$$y'_i(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\, y_k(x) \qquad \forall x \in [a,b] = I \quad i = 1,2,\dots,n$$

Notazione $\quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$; $\|y(x)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[a,b]} |y_i(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = A(x) \cdot y(x)$$

Integrando si ottiene

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} A(\tau)\, y(\tau)\, d\tau \qquad (1)$$

Se si considera la trasformazione

$$T : [C([a,b])]^n \longrightarrow [C([a,b])]^n$$

così definita

$$T(y(x)) := y_0 + \int_{x_0}^{x} A(\tau) \cdot y(\tau)\, d\tau \qquad x, x_0 \in [a,b]$$

Proposizione $\quad y(x) \in [C([a,b])]^n$ è soluzione di (1) se e solo se $y(x)$ è un punto fisso di T, ovvero $Ty = y$.

Metodo delle approssimazioni successive

Definiamo per induzione, $y_0(x) \equiv y_0$ (base indutt.)

$$y_1(x) = T(y_0(x)) = y_0 + \left(\int_{x_0}^{x} A(\tau)\,d\tau\right) y_0 = \left[I + \int_{x_0}^{x} A(\tau)\,d\tau\right] y_0$$

$$y_2(x) = T(y_1(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} A(\tau)\cdot\left(y_0 + \int_{x_0}^{\tau} A(\tau_1)\cdot y_0\,d\tau_1\right)d\tau =$$

$$= y_0 + \left(\int_{x_0}^{x} A(\tau)\,d\tau\right)\cdot y_0 + \left(\int_{x_0}^{x} d\tau \int_{x_0}^{\tau} A(\tau)\cdot A(\tau_1)\,d\tau_1\right)\cdot y_0$$

$$= \left[I + \int_{x_0}^{x} A(\tau)\,d\tau + \int_{x_0}^{x} d\tau \int_{x_0}^{\tau} A(\tau)A(\tau_1)\,d\tau_1\right] y_0 \ldots$$

In generale

$$y_n(x) = \left[I + \int_{x_0}^{x} A(\tau)\,d\tau + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\tau} A(\tau)A(\tau_1)\,d\tau\,d\tau_1 + \cdots + \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\tau}\cdots\int_{x_0}^{\tau_{n-1}} A(\tau)\cdot A(\tau_1)\cdot A(\tau_{n-1})\right] y_0$$

Il termine k-mo della sommatoria in parentesi quadra è maggiorato da $\frac{n^k M^s}{k!}(x-x_0)^k$ dove $M = \max\limits_{\substack{x\in[a,b]\\ i,j=1,\dots,n}} |a_{ij}(x)|$

Se denotiamo con $\mathop{E}\limits_{x_0}^{x} A(\tau)$ la somma della serie otteniamo

$$y(x) = \mathop{E}_{x_0}^{x} A(\tau)\, y_0$$

Nel caso particolare che A è una matrice costante otteniamo

$$\mathop{E}_{x_0}^{x} A = \mathrm{Exp}\left[A\cdot(x-x_0)\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k (x-x_0)^k}{k!}$$

<u>Se</u> A è diagonalizzabile, non singolare ovvero $\exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n$ autovalori e $v_1, \dots, v_n$ autovettori indipendenti di A, otteniamo che.

$$\exists\ c_1, \dots, c_n\ :\quad y_0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Dunque
$$\boxed{y(x)} = \left(e^{A(x-x_0)}\right) \cdot y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k y_0 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k (c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} c_i \lambda_i^k v_i = \boxed{\sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i (x-x_0)}}$$

<u>Se</u> A non possiede una base di autovettori indipendenti si potrebbe verificare che la soluzione contiene termini polinomiali del tipo

$$y(x) = P(x-x_0) \cdot e^{\lambda_i (x-x_0)}$$

Limitatamente al caso $n = 2$ risolveremo il problema nella sua generalità.

<u>Osservazione</u>: Si ricordi che $y'' + a y' + b y = 0$ rientra nella categoria dei sistemi 2×2.

Tecniche risolutive per $n=2$

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}\, y_1(x) + a_{12}\, y_2(x) \\ y_2'(x) = a_{21}\, y_1(x) + a_{22}\, y_2(x) \end{cases}$$

Caso 1 A ammette due autovalori reali distinti $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ di autovettori v_1 e v_2.

La soluzione è dunque data da

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

Esempio Risolvere

$$\begin{cases} y_1' = 5 y_1 + 3 y_2 \\ y_2' = -6 y_1 - 4 y_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

La soluzione è dunque data da

$$y_1(t) = c_1 e^{2t} - c_2 e^{-t} \quad ; \quad y_2(t) = -c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{-t}$$

Caso 2 Autovalori distinti ma complessi coniugati

autovalori $\lambda_1 = \alpha + i\beta$; $\lambda_2 = \alpha - i\beta$

autovettori $v_1 = u + iw$; $v_2 = u - iw$

$$y(x) = c_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t}(u+iw) + c_2 e^{\alpha t} e^{-i\beta t}(u-iw)$$

$$= e^{\alpha t}\left[c_1 e^{i\beta t}(u+iw) + c_2 e^{-i\beta t}(u-iw)\right]$$, sviluppando nella parentesi

$$= K_1 e^{\alpha t}(u \cos\beta t - w \operatorname{sen}\beta t) + K_2 e^{\alpha t}(u \operatorname{sen}\beta t + w \cos\beta t)$$

Esempio

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 5y_2 \\ y_2' = -5y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 3 - 5i$

$\lambda_2 = 3 + 5i$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dunque in $\mathbb{C}$ due soluzioni indipendenti sono

$$e^{3t}(\cos 5t - i \operatorname{sen} 5t)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$ e la sua coniugata

Mentre parte reale e immaginaria sono le soluzioni indipendenti in $\mathbb{R}^2$, ovvero

$$e^{3t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 5t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 5t\right) \text{ ed } e^{3t}\left(-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 5t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 5t\right)$$

Caso 3 Due autovalori coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$.

Triangolarizziamo A. Sia u autovettore di A.

Denotiamo $v = e_1$ o $v = e_2$ che sia non proporzionale ad u e dunque se $v = e_k$, $Av =$ k-ma colonna A.

Decomponiamo Av su u e v, ovvero $Av = cu + dv$.

Poniamo $P = [u, v]$ e $B = \begin{bmatrix} \mu & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$

Risulta allora

$$AP = PB$$ e dunque A e B sono simili

e perciò risulta $\mu = d$.

Riassumendo

$$A = P B P^{-1} \quad \text{con} \quad P = [u, v] \quad e \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & c \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Il sistema $x' = Bx$, ovvero

$$x_1' = \lambda x_1 + c x_2$$
$$x_2' = \qquad \lambda x_2$$

è di soluzione immediata e risulta

$$x_2(t) = K_2 e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = e^{\lambda t}(K_1 + K_2 c t)$$

Essendo poi $y = Px$ otteniamo la soluzione di partenza

$$P e^{\lambda t} \begin{bmatrix} K_1 + K_2 c t \\ K_2 \end{bmatrix} = K_1 e^{\lambda t} u + K_2 e^{\lambda t} (t c u + v)$$

<u>Esempio</u>
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

$\lambda = 2$ autovalore doppio

$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ autovettore

Scegliamo $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e allora $Av = u + 2v$

e dunque le soluzioni sono

$$\begin{bmatrix} (-K_1 - K_2 t) e^{2t} \\ (K_1 + K_2(t+1)) e^{2t} \end{bmatrix}$$