
●

INTRODUZIONE

Purtroppo questo libro è rappresentato molto più dal sottotitolo che dal titolo. Infatti è una semplice trascrizione di miei appunti per vari corsi di logica che ho tenuto in passato all'Università di Salerno e come tutti i testi universitari di matematica non riesce ad evitare l'antico ed un po' noioso gioco "definizione-dimostrazione". Tuttavia ho preferito un titolo "esagerato" che contiene addirittura la parola "verità" poiché è bene ricordare che la logica, a differenza di altri settori della matematica, ha un oggetto di investigazione. Si occupa (più o meno bene) di trovare modelli matematici di quella parte dell'attività razionale dell'uomo che si riferisce al linguaggio ed alla verità.¹

Per essere più precisi, la logica di cui parleremo si riferisce al metodo deduttivo, tipico delle dimostrazioni matematiche, e non al metodo induttivo, tipico delle scienze sperimentali. Essa, come un po' tutto il nostro universo culturale, è nata nell'antica grecia grazie ad Aristotele ed agli stoici e quindi in ambito filosofico. Tuttavia, dagli inizi del novecento in poi ed essenzialmente con il grande matematico Hilbert, la logica diventa un argomento per matematici e per distinguerla dalle ricerche di tipo filosofico prenderà il nome di "logica matematica". In tale espressione il termine "matematica" ha una doppia valenza:

- serve ad indicare che il metodo adottato per studiare la logica è di tipo matematico,
- serve ad indicare che l'attenzione è rivolta principalmente ai ragionamenti in ambito matematico ed alla semantica fornita dal mondo delle strutture matematiche.

Scopo dichiarato di Hilbert è quello di dare un fondamento sicuro alla matematica per poter evitare i paradossi dell'infinito ed in particolare della teoria degli insiemi. Tuttavia, oltre ad avere scopi "fondazionali" le ricerche di logica matematica sono attualmente volte anche alla trattazione generale delle strutture matematiche (teoria dei modelli) con particolare attenzione alle strutture algebriche. Inoltre, un'altra fase è iniziata con lo sviluppo della moderna informatica e con l'esigenza di costruire calcolatori che simulino il più efficientemente possibile le attività umane. Esistono ad esempio linguaggi di programmazione come il Prolog in cui è possibile scrivere un semplice sistema di

¹ Sarò lieto di ricevere commenti o segnalazioni di errori presso il mio indirizzo gerla@unisa.it.

assiomi e produrre automaticamente le conseguenze logiche che se ne possono trarre. La logica diventa allora un importante capitolo della Intelligenza Artificiale.

Attualmente pertanto la logica matematica viene studiata da filosofi, matematici ed informatici.

INDICE

Introduzione

CAPITOLO 1

Un po' di storia

1. Il contributo di Aristotele	1
2. Solo 24 sillogismi su 256 sono validi !	3
3. Il contributo degli stoici	7
4. Calcolo letterale e geometria analitica come tappe dello sviluppo della logica	9
5. Leibniz: inutile affaticarsi a discutere, calcoliamo	13
6. Algebra della logica: George Boole	15
7. Ma Boole non basta: Frege	17
8. Hilbert e la nascita della nuova logica	21

CAPITOLO 2

Strutture algebriche e relazionali

1. Esempi di strutture algebriche: gruppi ed algebre di Boole	25
2. Nozione generale di struttura algebrica e di omomorfismo	28
3. Esempi di strutture relazionali: ordine e pre-ordine	30
4. Relazioni di equivalenza, partizioni e quozienti	32
5. Nozione generale di struttura relazionale e di omomorfismo	36
6. Congruenze e quozienti per le strutture algebriche	39
7. Congruenze e quozienti per le strutture relazionali	41
8. Omomorfismi e congruenze per insiemi ordinati e reticoli	44
9. Strutture del primo ordine ed altri tipi di strutture	48

CAPITOLO 3

Alcune nozioni di carattere universale

1. Sistemi di chiusura ed operatori di chiusura	51
2. Ulteriori proprietà	53
3. Teoremi di punto fisso per operatori algebrici	54
4. Sottostruttura generata da un dato sottoinsieme	59
5. Equivalenze e congruenze generate da una data relazione	60
6. Relazioni, giochi e labirinti	63
7. Parole e linguaggi come oggetti matematici: grammatiche	65
8. I sistemi di riscrittura	69

CAPITOLO 4**Il calcolo proposizionale**

1. Introduzione	75
2. Il linguaggio del calcolo proposizionale	77
3. La semantica del calcolo proposizionale	80
4. Il teorema di completezza funzionale	85
5. Un sistema di riscrittura per la forma normale disgiuntiva	88
6. I tableaux semantici: un esempio di intelligenza artificiale	91
7. Approccio algebrico alla semantica	97
8. Logiche a più valori di verità	100

CAPITOLO 5**Il calcolo dei predicati**

1. Linguaggi del primo ordine: alfabeto e termini	105
2. Linguaggi del primo ordine: le asserzioni	109
3. Cosa è la verità: interpretare un linguaggio	114
4. Interpretazione dei termini e delle formule	117
5. Formule logicamente vere ed equivalenze logiche	121
6. Un sistema di riscrittura per la forma normale prenessa	125
7. Skolemizzazione: eliminare i quantificatori esistenziali	130
8. Conseguenze logiche	134
9. Logiche con uguaglianza	136
10. Estensione di una formula e proprietà definibili	139

CAPITOLO 6**Proprietà che si conservano**

1. Omomorfismi nella logica del primo ordine	143
2. Un automorfismo per le radici complesse di un polinomio	146
3. Proprietà che si conservano per isomorfismi: l'equivalenza elementare	148
4. Verificare se due strutture non sono isomorfe, calcolare il gruppo degli automorfismi	151
5. Principio di dualità in un'algebra di Boole	155
6. La classe dei modelli di una teoria non è un insieme	157
7. Proprietà che si conservano per omomorfismi	162

CAPITOLO 7

Proprietà che si conservano: quozienti, prodotti diretti ed ultraprodotti

1. Congruenze, quozienti ed epimorfismi canonici	167
2. Una applicazione: la prova del nove	169
3. Proprietà che si conservano per passaggio a quoziente	172
4. La logica monadica: la logica di Aristotele è decidibile	175
5. Prodotto diretto di due interpretazioni	179
6. Proprietà che si conservano per prodotti diretti	182
7. Prodotto diretto di una qualunque famiglia di interpretazioni ..	186
8. Ultraprodotti: conservare tutte le proprietà	189
9. Applicazioni della teoria degli ultraprodotti	196
10. Ultraprodotti, infinitesimi ed infiniti	198

CAPITOLO 8

Generare i teoremi di teorie semplici

1. Come costruire un sistema inferenziale corretto	203
2. Teorie con solo regole e fatti: la programmazione logica	207
3. Un sistema inferenziale per i programmi	209
4. Modelli di Herbrand: mondi costruiti con parole	212
5. Un teorema di punto fisso per costruire modelli	216
6. Interpretazione di Herbrand associata ad una interpretazione ...	221
7. Varietà algebriche e strutture algebriche libere	225
8. Logica induttiva: teorie scientifiche come compressione dell'informazione	229

CAPITOLO 9

Generare i teoremi di una teoria qualunque

1. Altre regole di inferenza	231
2. Una condizione perché un sistema deduttivo sia sufficientemente potente	234
3. Modelli di Herbrand associati ad una data teoria	237
4. Il teorema di completezza di Gödel	240
5. Alcune conseguenze del teorema di completezza	243
6. Il sistema di assiomi di Peano per l'aritmetica	246
7. Il fallimento del programma di Hilbert	249
8. La teoria degli insiemi di ZF ed il paradosso di Skolem	254
9. La deduzione come ricerca del minimo punto fisso	256

Nomenclatura	259
Indice analitico	261
Bibliografia	265