Mariella Cautiero - Giangiacomo Gerla

Un testo scolastico del 1897, gli « Elementi di geometria » di Giuseppe Veronese

1. INTRODUZIONE

Nel 1897 fu pubblicata la prima edizione del testo per le scuole superiori « Elementi di Geometria », scritto da G. Veronese con la collaborazione di P. Gazzaniga. Dopo tale trattato l'autore ne scrisse diversi altri (si veda [15], [16] e [17]) per i diversi tipi di scuola allora esistenti. Ciò testimonia l'impegno non episodico nel campo della didattica di uno scienziato della levatura di Veronese.

L'apparizione degli *Elementi* fu un fatto di notevole importanza nell'evoluzione del metodo di insegnamento della matematica. Per la prima volta infatti si cercò di « conseguire nell'insegnamento della Geometria elementare razionale quello stretto rigore scientifico che è vivamente desiderato dai nuovi indirizzi della scienza » ([12] pag. V). Essa dette origine a numerose discussioni e diversi autori dell'epoca ne furono influenzati nella stesura dei loro libri di testo (si veda ad esempio [7] e [9]).

In questo articolo vogliamo esaminare alcuni aspetti degli *Elementi* che ci sembrano tuttora interessanti per quanto riguarda l'insegnamento della geometria. Con ciò naturalmente non si pretende di esaurire l'argomento, stante il grande numero di spunti originali presenti in tale opera. Per la comprensione degli *Elementi* dovremo riferirci anche all'*Appendice* [13], una guida che Veronese indirizza agli insegnanti allo scopo, tra l'altro, di giustificare alcune « impurezze » del sistema di assiomi rese necessarie da esigenze didattiche. Essenziale è anche rifarsi ai lavori di Veronese sui fondamenti (in particolare a [11]). Esiste infatti uno stretto legame tra

le ricerche di Veronese sui fondamenti e le sue opinioni nel campo della didattica; ed è questo forse uno degli aspetti più interessanti dell'opera di Veronese. Egli afferma ad esempio in [14]:

« Toutes les discussions auxquelles a donné le tete d'Euclide dèmontrent clairement que le problème didactique depend du probleme scientifique relatif aux postulats » ([14], p. 434).

2. LA POLEMICA CONTRO I TESTI SCOLASTICI DELL'EPOCA

Il testo di Veronese, come dichiara egli stesso nella prefazione, è scritto in polemica con quelli esistenti all'epoca. In tali testi o veniva utilizzato, fin dall'inizio, il metodo analitico, ispirandosi con ciò ai famosi *Eléments de Geometrie* di A. M. Legendre, oppure, nel nome del rigore, veniva riproposto semplicemente un ritorno ad Euclide (si veda ad esempio la traduzione italiana di alcuni libri degli *Elementi* di Euclide fatta da E. Betti e F. Brioschi per l'insegnamento della geometria nelle scuole classiche [2]). Più radicali sono le sue critiche all'approccio analitico, critiche che hanno motivazioni sia di carattere scientifico che didattico.

Prima di tutto per Veronese non è lecito confondere quelli che sono eventuali risultati dell'indagine scientifica sullo spazio, cioè la possibilità di coordinatizzazione tramite i numeri reali, con l'indagine stessa. Identificare direttamente lo spazio con la varietà numerica a tre dimensioni significa far prevalere *a priori* un particolare punto di vista circa la natura dello spazio. Ad esempio, riferendosi ai lavori di geometria analitica, Veronese afferma ([11], p. XXI):

« Pur riconoscendo la grande importanza di tali lavori, che mettono in relazione le questioni dei principi geometrici con teorie feconde dell'analisi, non possiamo però disconoscere che in tale maniera si rende schiava la trattazione del problema di uno speciale punto di vista, che *a priori* si vuol far prevalere; mentre bisogna vedere qual'è il metodo più proprio alla natura di esse ».

Tale affermazione ci sembra giusta. Ne è una prova l'attuale vasto sviluppo di ricerche su geometrie (non archimedee, non desarguesiane, non pappiane, ecc...) le quali *non* sono coordinatizzabili tramite il campo dei numeri reali. Non è un caso che fu proprio Veronese il primo a definire in [11] una geometria non archimedea, delineando contemporaneamente una teoria delle grandezze non archimedee che ha molte somiglianze con la moderna analisi non standard.

Veronese osserva poi che è discutibile una fondazione della geometria che utilizzi i numeri reali, in quanto « non è detta ancora l'ultima parola sui fondamenti dell'analisi... » (vedi [11], pag. XXIII).

Tale critica può sembrare annullata dal processo di aritmetizzazione dell'analisi che proprio in quel periodo si andava compiendo. Ma è anche vero che tale aritmetizzazione utilizza la teoria degli insiemi come punto di partenza e che, da quando sono stati scoperti i famosi paradossi, non è ancora detta l'ultima parola sui fondamenti della teoria degli insiemi.

Per quanto riguarda le critiche dal punto di vista didattico ai metodi analitici, Veronese sostiene che « Un difetto del metodo analitico, e da tutti riconosciuto, è appunto quello che esso ci conduce molto sovente dalle premesse al risultato finale senza farci conoscere i diversi anelli della catena delle proprietà geometriche occorrenti nel passaggio dalla prima proprietà all'ultima... » ([11], pag. XXI).

In altri termini il metodo analitico, rendendo meccaniche le dimostrazioni, pur conducendo a risultati veri (spesso in modo più spedito) non fa comprendere « perché » tali risultati sono veri. In un certo senso tale critica fu comune ai principali geometri italiani di quel tempo: ad esempio, F. Brioschi e L. Cremona affermavano la necessità che i giovani « apprendano a ragionare, a dimostrare, a dedurre: non giovano dunque i mezzi celeri né i libri nei quali la geometria è mescolata con l'aritmetica e con l'algebra; l'Euclide è veramente il testo che meglio serve a questi fini » [2]. Per Veronese, però, Euclide non è più adeguato essendovi nella sua opera diversi difetti tecnici. Come altri, anch'egli critica l'introduzione che Euclide tacitamente fa nelle sue dimostrazioni di proprietà dello spazio non espresse negli assiomi o

nei postulati (né da essi deducibili). Al contrario, Veronese vuole introdurre precisione e chiarezza nell'insegnamento secondario, aderendo così a quella nuova concezione del rigore che si andava formando nelle ricerche della scuola dei geometri italiani alla fine del secolo scorso e che sfocerà nella definizione della geometria come particolare sistema ipotetico deduttivo: « les recherches sur les principes de la Géométrie ont, dans le cours de ce siècle, enrichi la Science de nouveaux résultats importants, de méthodes générales et fécondes, et ont de plus ouvert aux philosophes de nouvelles voies d'investigation sur la théorie de la connaissance des concepts fondamentaux des Mathématiques; doivent-ils rester sans influence sur l'enseignement de la Géométrie rationnelle élémentaire, lorsque le but même de cet enseignement est de contribuer à préparer l'esprit aux études supérieures, en l'habituant au raisonnement rigoureux ? » ([14], pag. 433).

3. FUSIONISMO E STRUTTURALISMO

Negli anni in cui veniva pubblicato il testo di Veronese era in atto in Italia ed in altri paesi europei, una vivace polemica sulla opportunità o meno di introdurre, nell'insegnamento secondario, nozioni di geometria solida contemporaneamente alle nozioni di geometria piana. I seguaci di una tale unificazione, che presero il nome di « fusionisti », ritenevano che in tale modo si realizzasse un notevole risparmio di tempo e di energia sia per la possibilità di unificare la trattazione di argomenti simili, sia per la possibilità di utilizzare la geometria dello spazio per dimostrare teoremi di geometria piana (si veda ad esempio [10]).

Veronese si occupa della questione del fusionismo sia nell'introduzione che premette agli *Elementi* e sia nei « Postulats de la Géométrie dans l'enseignement ». Egli si dichiara essenzialmente contrario al fusionismo in quanto l'utilizzazione della geometria solida per dimostrare teoremi di geometria piana è possibile solo con riferimento alle proprietà proiettive; ciò è troppo limitativo in quanto i teoremi più significativi della geometria elementare hanno carattere me-

trico. Egli inoltre considera didatticamente preferibile procedere dal particolare al generale perché « i postulati sono tanto più semplici quanto più semplice è l'ente a cui si riferiscono ».

Ciò comporta in primo luogo lo studio della retta, poi quello del piano ed infine quello dello spazio. In altri termini il suo è un atteggiamento, da questo punto di vista, diametralmente opposto a quello dei fusionisti. D'altra parte alcuni aspetti del modo di procedere di Veronese mostrano che egli non era poi tanto lontano dal fusionismo. Innanzitutto, egli fornisce una sua dimostrazione del teorema di Desargues « se due triangoli hanno il loro vertice allineato in un punto, i loro lati si incontrano in tre punti di una retta » che fu utilizzata, secondo quanto afferma il Veronese, dal De Paolis per dare la più nota dimostrazione fusionista: una costruzione del pentagono regolare indipendentemente dall'equivalenza e dalle proporzioni. Inoltre Veronese anche se in un'ottica notevolmente diversa da quella dei fusionisti propone una sorta di unificazione della geometria piana con quella solida « ...les théories spéciales telles que celles de l'équivalence, de la similitude, de la mesure, etc., pourront être traitées simultanément dans le plan et dans l'espace. Je ne veux pas dire, avec les fusionistes, que les figures à trois dimensions dans ces théories doivent intervenir dans la démonstration peuvent être étendues simplement du plan à l'espace » ([14], pag. 446).

Una tale unificazione egli la ottiene mediante il seguente principio. Si supponga che per una figura F valgano i postulati a, b, c, d e che per la figura F' valgano i postulati a', b', c', d' che si ottengono dai precedenti mediante un opportuno cambiamento di alcune espressioni linguistiche. Supponiamo inoltre che la proprietà di F sia deducibile da a, b, c, d . Allora la proprietà ottenuta mediante il cambiamento delle stesse espressioni linguistiche, è valida per F' . Caso particolare di tale principio è quello di dualità della geometria proiettiva. In tale caso infatti è sufficiente scambiare le espressioni « punto » e « retta », « appartenere » con « contenere », ecc. per passare da un teorema del sistema punti-rette ad un teorema del sistema rette-punti. Ma il princi-

pio si può applicare a molti altri casi, ad esempio si può supporre che F sia una retta ed F' un fascio di rette. Allora « essendo il fascio un sistema lineare omogeneo, valgono per esso tutte le proposizioni dedotte dal post. II. Ad esempio, quello relativo alla somma ed alla differenza dei segmenti; basta sostituire al punto il raggio e al segmento l'angolo » ([12], pag. 45, Oss. 22).

In un certo senso si può affermare che il principio annunciato da Veronese equivale al moderno metodo assiomatico visto in chiave strutturalistica. La differenza consiste nel fatto che l'attuale metodo strutturalista utilizza un unico linguaggio (ed un unico sistema di postulati) per poter trattare l'intera classe di strutture matematiche che verificano il dato sistema di postulati. Ciò permette di poter considerare le conseguenze dei postulati automaticamente asseribili per tutte le strutture della detta classe. Al contrario Veronese considera espressioni linguistiche diverse quando si ha a che fare con strutture diverse. Ne segue che per poter esprimere che due diverse strutture sono modelli di uno stesso sistema di postulati egli deve ricorrere ad un processo di « trasformazione di un linguaggio in un altro ». Naturalmente ciò è conseguenza anche del fatto che Veronese considera e confronta strutture diverse che sono parti di un'unica struttura (quella dello spazio). Ciò, se si vuole evitare confusione, rende necessaria l'utilizzazione di linguaggi diversi per distinguere elementi di strutture diverse. Inoltre in diversi casi egli sembra applicare direttamente il metodo strutturalista. In conclusione in Veronese vi è un'unificazione della geometria del piano con quella dello spazio, anche se ciò avviene più in chiave strutturalista che secondo lo spirito dei fautori del fusionismo.

4. ASPETTI DEL METODO ASSIOMATICO IN VERONESE

Prima di entrare nel merito della struttura degli *Elementi*, ci sembra opportuno accennare alle concezioni generali di Veronese circa la geometria ed il metodo assiomatico quali emergono nel suo libro sui *Fondamenti*. Innanzitutto Vero-

nese distingue tra scienze formali e scienze sperimentali. Tra le prime pone l'aritmetica e la logica, tra le seconde la geometria e la fisica (cfr. [11], pag. VII).

La geometria è sperimentale in quanto si fonda su di un sistema di verità primitive (gli assiomi) dettate dall'intuizione, intuizione che a sua volta è un prodotto della percezione e dell'esperienza. Da ciò segue in primo luogo che tali assiomi si possono considerare validi solo nel campo limitato dell'esperienza; se si vuole considerarli validi in tutto lo spazio ciò deve essere dimostrato o esplicitamente postulato. Ma ciò non è ancora sufficiente perché è possibile (ed utile per lo sviluppo teorico della geometria) aggiungere agli assiomi alcuni « postulati » o « ipotesi » che, pur non essendo suggeriti dall'esperienza, non sono in contrasto con essa e quindi, cosa questa essenziale, sono compatibili con il nucleo di assiomi già accettato. Così, ad esempio, che per due punti del campo della nostra osservazione passi una sola retta è un assioma, cioè una verità dettata dall'esperienza dello spazio limitato che ci circonda. Invece che per due punti al di fuori dal nostro campo di osservazione valga tale proprietà è cosa che si può solo postulare. Ancora, che lo spazio a tre dimensioni della nostra esperienza sia immerso in uno spazio a quattro dimensioni è un postulato che, pur non essendo dettato dall'esperienza, è pienamente compatibile con gli assiomi già stabiliti. Naturalmente vi sono diversi possibili sistemi di postulati da poter aggiungere coerentemente agli assiomi della geometria, e ciò permette di sviluppare diversi tipi di geometrie (non euclidee, non archimedee, ecc.).

Una volta stabiliti gli assiomi ed i postulati, la geometria doveva poi procedere in modo puramente razionale: la validità dei suoi asserti non doveva dipendere da verifiche sperimentali ma dall'accortezza delle deduzioni. In tale senso la geometria, per Veronese, aveva molto in comune con le scienze formali.

La stessa polemica contro l'introduzione del movimento come concetto primitivo è una espressione di una tale concezione. Infatti egli riteneva che il movimento appartenesse esclusivamente al mondo dell'esperienza e quindi che il primo passo verso una formalizzazione rigorosa della geometria

fosse proprio l'espulsione di tale concetto dal suo corpo. Si noti, per comprendere un tale atteggiamento, che una formalizzazione adeguata del concetto di movimento è posteriore, anche se di poco, agli scritti principali di Veronese. Inoltre era di uso frequente nelle scuole definire l'uguaglianza di figure tramite la sovrapponibilità delle stesse, senza peraltro specificare in modo rigoroso che cosa si debba intendere per sovrapponibilità.

In definitiva in Veronese sono presenti due esigenze, non sempre conciliabili. Da un lato quella di legare, per motivi di ordine scientifico e didattico, il momento della formulazione degli assiomi quanto più possibile all'esperienza. Dall'altro quella di dare una organizzazione razionale, quanto più unitaria e semplice possibile, dell'intera materia. Quest'ultima esigenza lo spinge ad esempio a cominciare coll'introdurre l'elemento più semplice, il punto, per poi passare alla retta, al piano ed allo spazio. Ma, se si vuole, le tappe attraverso cui si realizza l'esperienza dello spazio procedono nell'ordine inverso. Dalla percezione degli elementi tridimensionali si perviene, mediante astrazione, a quelli di dimensione via via inferiore (si veda in proposito l'interessante articolo di G. Giorgi, in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*, Vol. III, Parte II, p. 987).

Interessante, anche se non molto chiara, è poi la questione degli assiomi pratici in Veronese. Egli afferma, in sostanza, che sono pratici quegli assiomi che, pur non essendo necessari allo sviluppo logico della geometria, lo sono per le sue applicazioni pratiche. Esempi di tali assiomi sono quello afferente la tridimensionalità dello spazio, l'assioma di Euclide circa l'unicità della parallela e quello di Archimede. Come si vede tali assiomi tendono a riportare la geometria nel campo ristretto del mondo a noi circostante; proprio nel campo da cui i postulati ci avevano fatto uscire. Così la tridimensionalità dello spazio è un principio che riconduce la geometria, che è perfettamente in grado di parlare di spazio a più di tre dimensioni, a quelli che sono i limiti ristretti della nostra esperienza. La stessa cosa si può dire per il postulato di Archimede (ricordiamo che Veronese sviluppa una geometria non archimedea che si presenta come estensione

dello spazio archimedeo della nostra esperienza, così come la geometria a più dimensioni si presenta come estensione dello spazio tridimensionale della nostra esperienza).

Leggermente diversa la situazione per l'assioma pratico « Una figura può muoversi liberamente nella retta, nel piano e nello spazio mantenendosi congruente a se stessa anche se alcuni punti restano fissi » (negli *Elementi*, pag. 198). Tale assioma indica un modo pratico per ottenere figure congruenti. Si noti comunque che con tale assioma non si vuole definire la congruenza tra figura, che in Veronese si definisce a partire dalla congruenza tra segmenti (che è un concetto primitivo).

In definitiva in Veronese si manifesta un costante riferimento al campo limitato dell'esperienza che è il punto di partenza per la trattazione « astratta » della geometria ed il punto di arrivo per le sue applicazioni pratiche. In un certo senso egli si riferisce a due modelli, uno (« concreto » e « limitato ») dato dal campo C dell'esperienza, ed uno (« astratto » ed « illimitato »), chiamiamolo S, che è compito del matematico definire. L'aggiunta dei postulati agli assiomi è lo strumento che permette il passaggio da C ad S. La considerazione degli assiomi pratici permette il passaggio da S a C. Ciò comporta tra l'altro la validità « locale » del sistema di Veronese: « Un vantaggio dunque dei postulati miei è anche questo: che il sistema di proposizioni e di costruzioni date nel testo, eccettuate alcune facili modificazioni, rimane lo stesso anche quando s'intenda che i postulati valgano nel solo campo C corrispondente a quello della nostra osservazione esterna » ([13], pag. 15).

In definitiva l'organizzazione generale dell'assiomatica del Veronese vuole rispondere all'esigenza di evidenziare le tappe di una razionalizzazione delle esperienze che ciascuno individuo ha dello spazio che lo circonda. In tale senso la proposta di Veronese, nonostante i numerosi punti oscuri che a volte presenta, ci sembra ancora di un notevole interesse per la didattica della matematica.

Concludiamo questo paragrafo osservando che gli *Elementi* si differenziano dai *Fondamenti*, a cui ci siamo fino ad ora riferiti, per alcune semplificazioni dovute ad esigenze

didattiche. Ad esempio non viene fatta distinzione tra « postulati » ed « assiomi » e, per brevità, alcuni teoremi vengono dati come assiomi (precisamente i postulati III, IX, XIII, XIV e, parzialmente, il postulato VIII). D'altra parte le questioni di indipendenza degli assiomi vengono rimandate all'*Appendice*, che Veronese, con una scelta estremamente moderna, associa agli *Elementi*. Veronese era giustamente convinto che nell'usare il metodo assiomatico può essere didatticamente più proficuo partire da un sistema di assiomi non indipendenti. E' necessario però che l'insegnante sappia, appunto attraverso una « guida », quali assiomi sono deducibili dagli altri e, più in generale, quali itinerari didattici è possibile seguire volendo infittire o sfoltire l'elenco degli assiomi.

5. IL SISTEMA DEI POSTULATI NEGLI « ELEMENTI »

Diamo ora l'elenco dei postulati come sono esposti negli *Elementi*.

(I) Esistono punti distinti (pag. 8).

(II) Esiste un sistema lineare di punti che chiamasi retta, tale cioè che:

a) Se a e b sono due segmenti del sistema, considerati in un dato verso, ha luogo l'uno o l'altro dei due fatti, il primo dei quali esprimiamo dicendo che b è uguale ad a , l'altro dicendo che b non è uguale ad a . Se b è uguale ad a , ha luogo fra b ed a una corrispondenza univoca e del medesimo ordine sì che le parti di b sono pure eguali alle parti corrispondenti di a . Ogni segmento a è uguale ad a ; nessun segmento è uguale e non uguale ad un altro segmento b . Se a è uguale a b , è altresì b uguale ad a . E se a è uguale a b , e b è uguale a c , è pure a uguale a c .

b) Un segmento non è uguale ad una sua parte. Un segmento AB qualsiasi è uguale al segmento BA .

c) Dato sulla retta un punto A e un segmento qualunque XY , esistono due segmenti AB , AC eguali ad XY (pag. 10).

(III) Ogni segmento rettilineo è divisibile in due parti eguali (pag. 21).

(IV) Esistono punti fuori della retta. Esiste una sola retta che contiene due punti dati (pag. 21).

(V) In ogni retta esiste un segmento eguale ad un segmento qualunque dato (pag. 25).

(VI) La coppia di raggi($a b$) di vertice O è eguale alla coppia inversa ($b a$) (pag. 27).

(VII) Due rette parallele sono opposte rispetto al punto di mezzo di ogni loro segmento trasversale (pag. 30).

(VIII) Se da un punto qualunque interno (od esterno) di un lato di un triangolo si conduce la parallela ad un altro lato, essa incontra il terzo lato del triangolo in un punto interno, od esterno) (pag. 31).

(IX) Se le distanze di un punto dagli estremi A e B di un segmento rettilineo o di un arco di circonferenza (AB) sono a e b ed è $a < b$, vi è in (AB) almeno un punto X tale che (PX) è eguale ad un segmento dato c compreso tra a e b (pag. 85).

(X) Esistono punti fuori del piano (pag. 105).

(XI) Se un segmento XX' qualunque della retta ha gli estremi sempre variabili in verso opposto, esso contiene almeno un punto distinto dagli estremi (pag. 205).

(XII) Dati due segmenti diseguali della retta, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore (pag. 207).

(XIII) Non è possibile dividere una figura poligonale finita in parti poligonali in guisa che trascurandone alcune, le parti rimanenti, anche se disposte in differente modo, costituiscano una figura equivalente alla data (pag. 223).

(XIV) Non è possibile dividere una figura poliedrica finita in parti poliedriche in guisa che trascurandone alcune, le parti rimanenti, anche se disposte in differente modo, costituiscano una figura equivalente alla data (pag. 240).

POST. PRATICO I - Dato un piano e un punto fuori di esso, ogni retta passante pel punto O incontra il piano in un punto o è parallela ad una retta del piano (pag. 112).

POST. PRATICO II - Una figura può muoversi liberamente nella retta, nel piano e nello spazio mantenendosi congruente a se stessa, anche se alcuni punti di essa rimangono fissi (pag. 198).

Per chiarire il significato di tali postulati si tenga presente che gli enti primitivi sono i punti e le rette, mentre le relazioni primitive sono quelle di ordinamento (in ciascuna retta) e di uguaglianza, cioè di congruenza, di segmenti. Per *sistema lineare* Veronese intende un insieme munito di due relazioni d'ordine tra loro opposte, per *segmento* l'insieme dei punti compresi tra due punti dati. Il concetto di uguaglianza, implicitamente definito per i segmenti dai Postulati II e V, viene esteso a figure qualsiasi col considerare uguali due figure F ed F' quando esiste una corrispondenza che muta segmenti in segmenti uguali e che trasformi F in F' . Ed è in questi termini che va considerato il Postulato VI, dove per coppie di raggi si intende una coppia di rette su ciascuna delle quali sia stato fissato uno degli ordinamenti.

Il parallelismo tra rette viene definito mediante la simmetria centrale; l'unicità della parallela ad una retta data per un punto dato consegue dal Postulato VII. Il Postulato VIII va inteso nello spazio e gioca un ruolo essenziale nella definizione di piano. Questo viene infatti definito, dato un punto P ed una retta r non contenente P , come l'insieme dei punti della parallela per P ad r e delle rette congiungenti P con ciascun punto di r . Ciò comporta la necessità di dimostrare che se una retta ha due punti in comune con il piano allora giace sul piano (questa proposizione di solito è scelta come assioma della geometria dello spazio). Inoltre è necessario dimostrare che se P' ed r' sono un punto ed una retta del piano definito da P ed r , allora individuano lo stesso piano.

Per quanto riguarda il Postulato IX, si noti che la distanza non è un concetto primitivo (Veronese non presuppone

la utilizzazione dei numeri reali). Il riferimento ad essa è solo apparente essendo tale postulato perfettamente esprimibile in termini di segmenti e di confronto di segmenti. Tale postulato, come si mostra nell'Appendice, è deducibile dai postulati di continuità. Il Postulato X, analogo al V, è utilizzato per passare dalla geometria piana a quella solida. Come è avvenuto per il piano, lo spazio è definito come l'insieme dei punti appartenenti alle rette passanti per un punto P e parallele ad un dato piano α o alle rette congiungenti P non un punto di α . Nei *Fondamenti* tale procedimento è generalizzato per costruire spazi di dimensione superiore a tre.

Il Postulato XI di continuità si presenta per ultimo, nel libro V, quando è già stata sviluppata una buona parte della teoria. Ciò probabilmente per motivi didattici, essendo tale postulato, secondo Veronese, non dettato dall'esperienza. Questa scelta, che sarà poi seguita dalla maggioranza dei testi scolastici, obbliga Veronese ad ammettere, all'inizio, qualche postulato in più del necessario.

6. IL PARALLELISMO

Per motivo di spazio non è possibile entrare nel merito di tutti gli argomenti trattati negli *Elementi* in cui Veronese mostrò l'originalità e l'interesse didattico della sua impostazione. Per quanto riguarda l'uguaglianza e la teoria della equivalenza rimandiamo al testo di Chiellini e Giannarelli ([7] Cap. XVIII e Cap. XIX rispettivamente), dove sono esposte le idee di Veronese in proposito. Qui osserviamo solo che Veronese era nettamente contrario alla definizione della uguaglianza a partire dal concetto di movimento. Abbiamo già accennato ai motivi che inducevano Veronese a rifiutare il movimento come concetto primitivo da introdurre nella geometria. Aggiungiamo che egli riteneva l'uguaglianza un concetto logicamente antecedente a quello di movimento. Il primo addirittura era antecedente anche alla geometria, appartenendo alla logica. Il secondo, identificato spesso col movimento continuo senza deformazione, alla fisica (e quindi

inerente alle applicazioni della geometria, non alla geometria stessa). Nonostante ciò Veronese usa spesso, nelle sue dimostrazioni, quelle che attualmente prendono il nome di trasformazioni isometriche. Anzi ci sembra il primo autore di testi elementari che ne fa un uso così esteso. Ciò avviene, ad esempio, nelle dimostrazioni di teoremi che coinvolgono la nozione di parallelismo.

La definizione di tale nozione, per essere in accordo con le concezioni generali di Veronese di cui si è parlato, doveva soddisfare i seguenti requisiti:

— essere valida sia nel piano che nello spazio tridimensionale (ed essere utilizzabile eventualmente anche se ci si vuole estendere a spazi a più di tre dimensioni);

— avere carattere locale, avere cioè senso per il dominio limitato della nostra esperienza.

E' ovvio pertanto che la definizione usuale non poteva andare bene per Veronese: « non potevamo esprimere il postulato delle parallele definendo le parallele come quelle rette del piano che prolungate indefinitamente non si incontrano mai, perché due tali rette nessuno le ha mai vedute. D'altra parte dovevamo rendere il postulato indipendente dal piano... » ([12], p. XI).

Viene allora proposta la seguente definizione: « Le rette di una coppia diconsi parallele se sono opposte rispetto ad un punto fuori di esse ». Un tale tipo di definizione permetterà al Veronese di dimostrare le proprietà dei parallelogrammi mediante l'uso della simmetria centrale, in modo analogo a quanto attualmente proposto in molti moderni testi scolastici. Interessante anche la dimostrazione del noto teorema « In un triangolo la retta che unisce i punti medi di due lati è parallela al terzo lato ([13], pag. 9). Egli procede così: nel triangolo ABC siano M ed N i punti medi dei lati AB ed AC rispettivamente. Per dimostrare che la retta MN è parallela alla retta BC c'è da provare che tali rette si corrispondono nella simmetria di centro O , essendo O il punto medio del segmento BN . Prima di considerare tale simmetria osserviamo che la simmetria di centro M trasforma la retta AC

nella parallela per B ad AC , e tale parallela si ottiene congiungendo B con il punto N' simmetrico di N rispetto ad M . Inoltre anche le rette BN ed AN' sono parallele e distinte. Si considera poi la simmetria di centro O , in essa B si trasforma in N e la retta BN' nella sua parallela per N , cioè nella retta AC . Si passa poi a determinare il simmetrico N'' di N' rispetto ad O ; questo punto non può che essere O . Infatti, il segmento $N''N$ è uguale al segmento BN' (grazie alla simmetria di centro O), il segmento BN' è uguale ad AN (per la simmetria di centro M) ed AN è uguale ad NC (essendo N il punto medio di AC); e ciò prova che $N''N = NC$. Inoltre N'' deve appartenere alla retta AC , essendo tale retta la parallela a BN' passante per il trasformato N di B , e non può essere coincidente con A non essendo N', O ed A allineati. In conclusione $N'' = C$ e la retta $N'N$, che coincide con la retta MN , risulta pertanto parallela a BC .

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. Benedetti, « Sistema geometrico di G. Veronese, in « Enciclopedia delle Matematiche », XXL, paragrafo 38, Ed. Hoepli (1950).
- [2] E. Betti - F. Brioschi, « Gli Elementi di Euclide ».
- [3] E. Bisson Minio, « G. Veronese, Elementi di geometria » (recensione) *Periodico di Matematica* (1912), pp. 285-288.
- [4] G. Bordiga, « G. Veronese, Elementi di Geometria » (recensione) *Periodico di Matematica* (1897), pp. 135-136.
- [5] F. Brioschi - L. Cremona; *G. mat.* 7 (1896), p. 51-54, e p. 53.
- [6] A. Chiellini - R. Giannarelli, « L'esame orale di matematica », Ed. V. Veschi (1962).
- [7] G. Ingrami, « Elementi di Geometria », Bologna (1899).
- [8] F. Palatini, « Assiomi e ipotesi dei Fondamenti di Geometria di G. Veronese », *Periodico di Matematica* (1) 9 (1894), p. 7.
- [9] F. Palatini, « Geometria », Torino (1920).
- [10] E. Ulivi, « Una moda didattica in matematica, il Fusionismo », *Archimede*.
- [11] G. Veronese, « Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Lezioni per la Scuola di Magistero in Matematica », Padova (1891).
- [12] G. Veronese, « Elementi di Geometria, ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici (1° biennio) », Padova, Ed. Drucker (1897).
- [13] G. Veronese, « Appendice agli Elementi di Geometria », Padova, Ed. Drucker (1898).
- [14] G. Veronese, « Les postulats de la géométrie dans l'enseignement », 2° Congresso Int. di Matematica, Parigi (1902), pp. 434-450.
- [15] G. Veronese, « Nozioni di geometria intuitiva (avviamento professionale) », Padova, Ed. Drucker (1912).
- [16] G. Veronese, « Elementi di Geometria ad uso delle Scuole Normali », Padova, Ed. Drucker (1911).
- [17] G. Veronese, « Complementi di algebra e geometria per i Licei moderni », Padova, Ed. Drucker (1914).