UN PUNTO DAL VOLTO DI GATTO

Giangiacomo Gerla
Dipartimento di Matematica ed Informatica
Università Degli Studi Di Salerno
Via Salvatore Allende, Baronissi (SA)
ggerla@unisa.it

Alla mia gatta Titti

There are more points in Heaven and Heart, Horatio, than are dreampt of in our geometry (pseudo-Shakespeare, Amleto).

1. Introduzione.

Poniamoci il problema se sia possibile definire una teoria matematica in cui abbia senso una affermazione del tipo:

"un punto dall'aspetto di gatto ruotò verso me sorridendo".

Più in generale, chiediamoci:

è possibile allargare l'universo dei punti, definendo punti che assomigliano ad un gatto, punti triangolari, punti con direzione, punti che ruotano su se stessi ?

Sembra difficile poter dare una risposta positiva a tale questione. Infatti, come è noto, nella geometria che abbiamo appreso a scuola e all'università tutti i punti sono uguali tra loro (il gruppo delle isometrie è transitivo) e quindi non può esserci un punto dall'aspetto di gatto ed un punto, ad esempio, dall'aspetto di cane. Inoltre i punti non possono girare su se stessi come invece possono fare le figure solide perché ad un punto non si sa come attaccare un sistema di riferimento ed, in ogni caso, non si saprebbe distinguere la posizione del punto prima e dopo la rotazione. Naturalmente se avessi scritto:

"un solido con la forma di gatto che sorride ruotò verso me"

vi sarebbero stati (forse) meno problemi e l'usuale geometria fornitaci da Euclide sarebbe stata (forse) sufficiente a dare un significato a tale frase. Infatti si potrebbe considerare un dato insieme di figure solide dello spazio euclideo come rappresentativo della nozione di "figura solida con la forma di gatto che sorride". Inoltre sarebbe possibile parlare di rotazione nello spazio di uno di tali modelli geometrici. Tuttavia, anche in questo caso le cose non sono così semplici come appaiono in quanto non è affatto chiaro che cosa si debba intendere per "corpo solido". A dispetto di quanto si pensa comunemente, la geometria non dice molto in proposito poiché si occupa di regioni dello spazio e non di corpi solidi, di posizioni nello spazio e non di punti materiali. D'altra parte, qualunque idea si abbia di che cosa sia un corpo, è certo che un corpo è qualcosa di invariante rispetto ai possibili movimenti nello spazio ed è comunque diverso dalla regione dello spazio che esso può occupare in un dato istante. La questione di che cosa sia un corpo non è banale ed è esaminata ad esempio nel lavoro di W. Noll [18] (si vedano anche gli articoli di S. Borgo, N. Guarino, C. Masolo [1], [2]).

In realtà tutta la geometria e la fisica "ingenua" con cui l'uomo affronta la vita quotidiana è qualche cosa di cui si conosce poco. Anche una nozione semplice come quella di "buco" presenta svariati problemi come si può vedere nel bellissimo libro di R. Casati e A. Varzi [3]. Non si tratta solo di importanti questioni filosofiche: non è possibile insegnare ad un automa come si infila una vite in un buco o ad entrare attraverso una porta se non abbiamo un modello formale della nozione di "corpo" e di "buco".

Ma torniamo ai punti. Come abbiamo già osservato, le formalizzazioni proposte nelle teorie geometriche usuali non sono l'ambito adatto per andare a cercare punti dalla forma di gatto. Infatti in tali formalizzazioni i punti, in quanto nozioni primitive, sono forniti belli e fatti. Sarebbe allora opportuno individuare "ambienti matematici" in cui i punti possano essere definiti. Tali ambienti dovrebbero permettere di capovolgere il punto di vista della geometria usuale in cui, a partire dai punti, si definiscono regioni di tipo sferico, cubico e così via. Si dovrebbe invece partire (ad esempio) dalle regioni, e definire i punti di tipo sferico, cubico e così via. In definitiva si pone la seguente questione:

il considerare i punti come enti primitivi costituisce una scelta necessaria per ogni trattazione rigorosa della geometria ?

Il fatto è che la nozione di punto è forse quella più misteriosa (ed importante) della matematica e ciò perché a tale nozione è legato uno dei processi fondamentali del pensiero razionale, il processo di astrazione.

2. Un po' di storia dell'idea di punto.

Le idee riguardo alla geometria hanno subito, dai tempi di Pitagora ad oggi, continue e radicali modifiche, tuttavia è sorprendente che si sia sempre ritenuto di dovere assumere i punti come termini primitivi. Così, se Euclide si preoccupa all'inizio dei suoi Elementi di definire i punti indicando che *"Il punto è ciò che non ha parti"*, non differentemente Hilbert inizierà i suoi *"Fondamenti della Geometria"* con:

Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo "punti" gli oggetti del primo sistema . . . . . chiamiamo "rette" gli oggetti del secondo sistema . . . chiamiamo "piani" gli oggetti del terzo sistema.

Ma naturalmente la storia dei punti inizia prima di Euclide. Ad esempio, la scuola pitagorica, come noto, riteneva che alla base di tutto fossero i numeri interi intesi come aggregati di punti-unità.

Tra i primi filosofi . . . furono i cosiddetti Pitagorici, i quali, applicatisi alle scienze matematiche, le fecero per i primi progredire; cresciuti poi nello studio di esse, vennero nell'opinione che i loro principi fossero i principi di tutti gli esseri . . . Pensarono che gli elementi dei numeri fossero gli elementi di tutte le cose, e che l'universo intero fosse armonia e numero (*Aristotele, la Metafisica*).

Si noti che non si dice che i numeri (interi) sono misura di tutte le cose, si afferma invece i numeri sono gli elementi di tutte le cose. Ciò significa che i pitagorici ritenevano che gli elementi ultimi che costituiscono il mondo in cui viviamo coincidono con gli "elementi" dei numeri, cioè con le unità-punto che composte opportunamente permettono di costruire ciascun numero intero. Un corollario di tale punto di vista è che la grandezza di una qualunque figura geometrica è esprimibile da un numero intero. Basta infatti scegliere come unità di misura una unità-punto e contare di quante unità-punto è costituita la figura !

Come è noto, tale concezione fu ben presto messa in crisi dalla scoperta dell'impossibilità di fissare una unità di misura rispetto alla quale le misure del lato e della diagonale di un quadrato possano essere espresse da numeri interi. Tale scoperta mostrava che vi sono più cose in geometria (e quindi nel mondo) di quanto la filosofia dei pitagorici fosse capace di concepire.

Il fatto che i numeri interi si rivelassero uno strumento inadeguato a definire le grandezze geometriche convinse i matematici greci che la geometria doveva essere una scienza autonoma dall'aritmetica. Gli Elementi di Euclide costituiscono la testimonianza di quanto fosse sviluppata questa scienza. Il ruolo dei punti in tale geometria è ancora fondamentale anche se, a differenza di quanto accadeva per i pitagorici e di quanto accade nella geometria moderna, le figure geometriche non erano viste come insiemi di punti. E' vero che si considerava una relazione tra punti e figure geometriche chiamata "giacere su", ma tale relazione non deve essere confusa con la nozione di "appartenenza" della attuale teoria degli insiemi ed una figura non poteva essere identificata con l'insieme dei punti in essa giacenti. D'altra parte il rifiuto dell'infinito attuale non consentiva una tale identificazione anche se esso non contrasta con il fatto che, dato un segmento, per ogni intero n, è possibile trovare n punti in esso giacenti. Da questa proprietà segue poi un fatto notevole:

i punti devono necessariamente avere grandezza nulla.

Infatti, se, per assurdo, i punti avessero una grandezza $d \neq 0$, allora un segmento dovrebbe avere lunghezza maggiore di $n \cdot d$ per ogni intero n.

Una tale idea di punto giocò un ruolo fondamentale nella cultura greca in quanto comporta una totale idealizzazione degli enti geometrici. Nel mondo reale ogni cosa ha lunghezza, larghezza e spessore e quindi niente che appartiene a tale mondo può essere considerato un punto. Naturalmente anche tutti gli altri enti geometrici come la sfera, il cubo, il cilindro sono astratti: non sarà mai possibile trovare in natura o costruire un corpo perfettamente sferico. Ma, mentre il supporre l'esistenza di un corpo perfettamente sferico non è inconsistente con la nostra idea di materia, non si può dire la stessa cosa di qualcosa che sia senza dimensioni. Siamo in presenza di un altissimo livello di astrazione ed idealizzazione (si veda ad esempio A. Frajese in [4]).

3. Contro i punti, contro l'astrazione e (principalmente) contro i matematici.
Esiste un esempio di completo dissenso rispetto alla idea di punto formulata dai matematici greci. Mi riferisco a Sesto Empirico che, nel suo "Contro i geometri" (180 d.C.) afferma che

" . . . Essi (i geometri) dicono, inoltre, che una linea viene prodotta dallo scorrimento di un punto, una superficie dallo scorrimento di una linea, e un corpo solido dallo scorrimento di una superficie. . . ".

Ma,

" . . . il punto che essi definiscono come segno-privo-di-dimensioni, si deve concepire o come corporeo o come incorporeo. Corpo esso non è, secondo le loro stesse affermazioni, giacché le cose che non hanno dimensione, secondo loro, non sono corpi. Resta allora da dire che esso è incorporeo, il che è ancora una volta incredibile. Infatti, ciò che è incorporeo non si può concepire come generatore di una linea; quindi il punto non è un segno-privo-di-dimensioni.

Una analoga argomentazione viene ripetuta per confutare il concetto di linea senza larghezza il cui scorrimento genera una superficie e quello di superficie senza spessore il cui scorrimento genera i solidi. In altri termini Sesto pone il problema di come un ente senza dimensioni, il punto, possa generare, per scorrimento, un ente con una dimensione, la linea. Tale osservazione equivale, in un certo senso, ad osservare che se la lunghezza di un punto è zero allora ogni segmento, in quanto insieme (somma) di punti, deve avere lunghezza zero. La differenza sta nel riferirsi alla linea prodotta dallo scorrimento di un punto (operazione questa che non sembra coinvolgere l'infinito attuale) e non alla linea intesa come insieme di punti (concezione questa che, coinvolgendo l'infinito attuale, non poteva essere presa in considerazione dai matematici greci).

Un altro e più interessante tipo di critica riguarda non gli enti ideali ma il processo di astrazione mediante il quale l'uomo perverrebbe a concepire tali enti. Infatti per Sesto tutto ciò che viene concepito o viene concepito mediante una diretta esperienza oppure tramite un procedimento di immaginazione-astrazione. Ora è evidente che non possiamo mai avere un'esperienza diretta, ad esempio, di una linea senza larghezza e che questa idea di linea non è simile a niente di esistente

... giacché non cade sotto i nostri sensi una lunghezza che sia priva di larghezza ...

D'altra parte un procedimento di immaginazione-astrazione può avvenire

... per somiglianza, ad esempio dall'immagine di Socrate lo stesso Socrate, per composizione, ad esempio dal cavallo e dall'uomo un ippocentauro giacché mescolando le membra del cavallo e dell'uomo noi siamo riusciti ad immaginare l'ippocentauro che non è né uomo né cavallo ma è composto da entrambi. Per analogia, infine, si concepisce qualcosa ancora in due guise ossia per accrescimento o per diminuzione, come quando, ad esempio, tenendo presenti gli uomini normali ... concepiamo per accrescimento il Ciclope ... e come quando per diminuzione immaginiamo un pigmeo che non ci è mai caduto sotto i sensi.

Ora è evidente che il concetto di linea senza larghezza non somiglia a niente di esistente e che non può essere ottenuto per composizione. Non resta altro che il procedimento di diminuzione ma anche questo permette solo di ridurre a piacere (potenzialmente) la larghezza non di considerarla (attualmente) nulla e quindi non permette il tipo di astrazione che si richiederebbe. Anche in questo caso entra in gioco il rifiuto dell'infinito attuale. Ad esempio se noi volessimo definire un punto P immaginando una piccola sfera s_1 di centro P, poi un altra sfera s_2 di centro P e raggio dimezzato e così via, allora affermare che il punto P è il frutto del processo di astrazione definito in tale modo significa considerare tale processo infinitario terminato con un operazione di limite. Ma ciò appare possibile solo se si accetta l'infinito attuale.

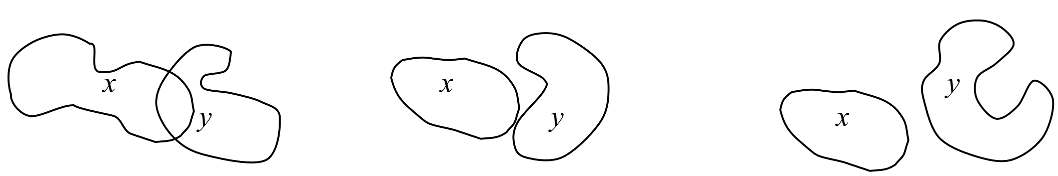
Un altro tipo ancora di procedimento di astrazione è quello che conduce ad una idea astratta mediante una semplice cancellazione di alcune delle proprietà dell'oggetto di partenza. Così il concetto di linea senza larghezza si può ottenere semplicemente "facendo finta" che la larghezza di un oggetto reale non esiste. Ma:

. . se noi, dopo aver concepito una certa lunghezza avente una data quantità di larghezza, abbiamo altresì la possibilità di assumere una lunghezza priva di larghezza sopprimendo quest'ultima, allora allo stesso modo, dopo aver concepito un pezzo di carne che abbia la proprietà di essere vulnerabile, mediante la soppressione di tale proprietà noi potremo anche concepire una carne che non sia soggetta alla vulnerabilità ... Ma tale cosa è completamente impossibile e contraria alle comuni nozioni umane: infatti ciò che viene concepito come invulnerabile secondo noi non è affatto carne, giacché la carne, in quanto carne, viene concepita con la proprietà di essere vulnerabile . . . Onde anche la lunghezza concepita come priva di larghezza non potrebbe essere una lunghezza, giacché la lunghezza, in quanto lunghezza, viene concepita come avente una certa quantità di larghezza.

In altre parole se un ente ideale A si ottiene da uno oggetto concreto C facendo astrazione da alcune particolari proprietà allora non è chiaro perché e fino a quale punto si possa considerare A un adeguato rappresentante di C. Potrebbe infatti darsi che le proprietà trascurate siano in qualche modo essenziali. Ad esempio supponiamo che un astronomo debba studiare l'orbita di un asteroide C in presenza dei pianeti $C_1,...,C_n$. Per fare questo supponiamo che decida di rappresentare con il punto A l'asteroide e con i punti $A_1,...,A_n$ i pianeti (e di concentrare le masse in tali punti). Supponiamo inoltre che, applicando la geometria euclidea e la meccanica del moto dei punti, giunga ad individuare l'orbita dell'ente ideale A: *chi può assicurare che tale orbita sia una buona approssimazione dell'orbita dell'asteroide reale C* ?

4. Regioni e contatto tra regioni.

Come osservato da L. L. Radice nella sua introduzione ai *Nuovi principi della geometria*, il primo a fondare la geometria sul concetto di corpo solido fu probabilmente Lobacevskij il quale vedeva i punti, le linee e le superfici come tipi di *contatto* tra i corpi. Purtroppo le definizioni di Lobacevskij sono alquanto oscure e, pur essendo presente l'enunciazione per cui i punti sono definiti a partire dai solidi, di fatto l'approccio proposto continua a basarsi sulla nozione di punto. Parecchio più tardi il famoso matematico e filosofo A. N. Whitehead inizia un esame ampio e rigoroso del come si possa derivare la nozione di punto da quella di regione. Appaiono le opere, *An Inquiry Concerning the Principle of Natural Knowledge* (1919) e *The concept of Nature* (1920) in cui sono assunte come primitive le nozioni di "regione" e di "inclusione tra regioni". L'inclusione non viene intesa in senso insiemistico ma come una relazione d'ordine nell'insieme delle regioni soddisfacente particolari proprietà. Più interessante, il libro successivo *Process and reality*, del 1929, nel quale, riprendendo una proposta di T. De Laguna, Whitehead sostituisce la nozione di inclusione con quella di connessione (cioè contatto o sovrapposizione). Le indagini di Whitehead, di carattere filosofico-epistemologico piuttosto che matematico, non sono e non vogliono essere una proposta di un sistema rigoroso di assiomi e definizioni. Esse evidenziano comunque una serie di interessanti caratteristiche della relazione di connessione e del processo di astrazione che porta alle nozioni di punto, linea e superficie. Tale analisi pertanto può essere il punto di partenza per una ricerca di una adeguata sistemazione assiomatica. Esporrò le idee basilari contenute in *Process and Reality* in termini matematici riferendomi alla parziale formalizzazione proposta in Gerla e Tortora [11]. Alla base del discorso di Whitehead sono strutture del tipo $(\mathcal{R},C)$ con $\mathcal{R}$ insieme i cui elementi vengono detti *regioni* e C relazione binaria in $\mathcal{R}$ detta *relazione di connessione*. Intuitivamente la relazione di connessione deve essere vista come una relazione topologica piuttosto che insiemistica ed è la relazione che sussiste tra due regioni che si sovrappongono o si toccano in un punto. Nei disegni sottostanti sono rappresentate due coppie di regioni connesse tra loro ed un coppia di regioni non connesse.



Se x è nella relazione C con y, dirò che *x è connesso ad y* e scriverò xCy. Inoltre indicheremo con $C(x)$ l'insieme $\{y \in \mathcal{R} : xCy\}$ delle regioni che sono connesse con x. La relazione di inclusione non è primitiva ma è definita al modo seguente.

Definizione 4.1. Data una coppia di regioni x ed y, poniamo $x \leq y$ e diciamo che x è *contenuta* in y se $C(x) \subseteq C(y)$.

In altre parole, si dice che x è contenuta in y se non è possibile entrare in contatto con x senza entrare in contatto anche con y. E' evidente che $\leq$ è un pre-ordine, cioè vale la proprietà riflessiva e transitiva. Non mi soffermerò su tutte le proprietà che Whitehead ritiene debbano essere verificate dalle strutture di connessione; si tenga presente che solo nel Capitolo 2 ne sono indicate ben 31! Mi limito ad elencare solo alcuni assiomi che, come verificato in Gerla e Tortora [11], equivalgono alle prime 12 proprietà.

- A_1 xCy implica yCx (proprietà simmetrica),
- A_2 non esiste una regione contenente tutte le altre,
- A_3 per ogni x ed y esiste z connesso sia con x che con y,
- A_4 per ogni x, xCx (proprietà riflessiva)
- A_5 se $C(x) = C(y)$ allora $x = y$,
- A_6 per ogni regione z esistono $x \leq z$ ed $y \leq z$ tali che x non è connesso con y.

Definizione 4.2. Chiamerò *struttura di connessione* una struttura $(\mathcal{R},C)$ che verifichi tale sistema di assiomi.

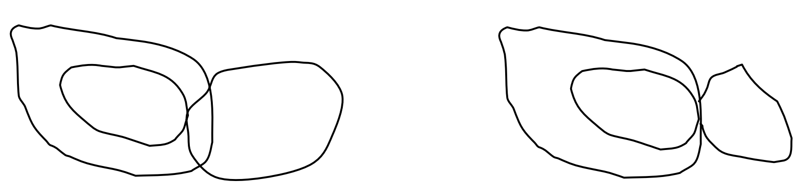
Si noti che A_2 mostra che l'intero spazio non viene considerato come regione e che quindi probabilmente l'idea di regione di Whitehead si riferisce alle sole regioni limitate. A_5 permette di provare la proprietà antisimmetrica di $\leq$ e quindi che $\leq$ è una relazione d'ordine. Da A_6 segue che ogni regione contiene propriamente altre regioni e che quindi non esistono atomi-punto nelle strutture di connessione. Accanto alla nozione di connessione definiamo quella di *sovrapposizione*. Diciamo che due regioni x ed y sono *sovrapposte* se esiste una regione z contenuta sia in x che in y. Per indicare che x è sovrapposto ad y scriveremo xSy, inoltre indichiamo con $S(x)$ l'insieme delle regioni che si sovrappongono ad x. E' immediato provare che se y si sovrappone ad x allora y è connesso ad x. Tuttavia in generale non vale il viceversa e la relazione di connessione (di carattere topologico) non coincide in generale con quella di sovrapposizione (legata alla sola nozione di ordinamento).

5. Punti, linee e processo di astrazione.

Passiamo ora alla nozione che maggiormente ci interessa, quella di punto, che Whitehead definisce tramite quella di *processo di astrazione* inteso come processo che consente una approssimazione-costruzione sempre migliore ad un ente "ideale". L'idea-guida è che un punto, un segmento od una superficie siano rispettivamente il "limite" di una successione di regioni sempre più piccole, sempre più sottili, sempre meno spesse. Per formalizzare tale idea, definiamo la relazione di *l'inclusione non tangenziale*, che indichiamo con $\ll$, ponendo

$$x \ll y \Leftrightarrow C(x) \subseteq S(y).$$

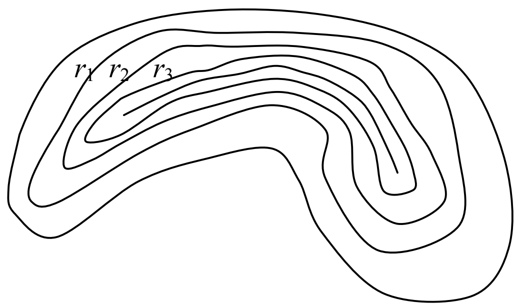
In altri termini la relazione $x \ll y$ vale se una regione z non può connettersi ad x senza sovrapporsi ad x. Invece x è *inclusa tangenzialmente* in y se x è inclusa in y ed esiste una regione z che si connette ad x senza sovrapporsi ad y. Nel seguito è mostrato un esempio di inclusione non tangenziale ed un esempio di inclusione tangenziale.



$y \quad x \quad z \qquad\qquad y \quad x \quad z$

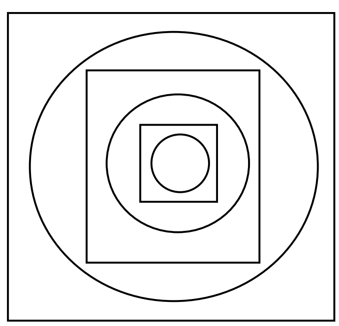
Definizione 5.1. Un *processo di astrazione* è una successione di regioni $(r_n)_{n\in N}$ tale che:
a) $(r_n)_{n\in N}$ sia decrescente rispetto a $\ll$
b) non esiste nessuna regione che sia contenuta in ogni r_n.

Intuitivamente si deve immaginare che un processo di astrazione $(r_n)_{n\in N}$ conduca a definire la figura geometrica $\bigcap_{n\in N} r_n$ e che tale figura sia di dimensione inferiore a quella delle regioni. Ecco un esempio di processo di astrazione che definisce una curva:



Tuttavia si deve tenere ben presente che, non essendo le regioni insiemi di punti, la nozione insiemistica di intersezione non ha senso. D'altra parte la condizione b) comporta che, nell'ambiente "concreto" delle regioni, non esiste nemmeno l'estremo inferiore di un processo di astrazione e che quindi tale processo definisce qualcosa di completamente nuovo rispetto a tale ambiente.

Il secondo passo è quello di identificare processi di astrazione che conducono allo stesso ente. Infatti può accadere che, ad esempio, uno stesso punto possa essere visto come limite di diversi processi di astrazione, ad esempio una successione di sfere concentriche, oppure una successione di cubi e così via.



Allora è necessario definire in qualche modo una relazione di equivalenza tra processi di astrazione; Whitehead procede al modo seguente:

Definizione 5.2. Si dice che un processo $(s_n)_{n\in N}$ *copre* un processo $(t_n)_{n\in N}$ se ogni regione s_i del primo processo contiene una regione t_j del secondo processo.

Intuitivamente $(s_n)_{n\in N}$ copre $(t_n)_{n\in N}$ se $\bigcap_{n\in N} s_n$ contiene $\bigcap_{n\in N} t_n$. La relazione ora definita è un pre-ordine e quindi induce una relazione d'equivalenza nell'insieme dei processi ed una conseguente partizione in classi complete di equivalenza.

Definizione 5.3. Chiamiamo *equivalenti* due processi che si coprono a vicenda. Chiamiamo *elemento* *geometrico* (astratto) ogni classe completa di equivalenza nell'insieme dei processi di astrazione.

Allora, intuitivamente i due processi di astrazioni $(s_n)_{n\in N}$ e $(t_n)_{n\in N}$ sono equivalenti se $\bigcap_{n\in N} s_n = \bigcap_{n\in N} t_n$. Inoltre un elemento geometrico si ottiene fissando un processo di astrazione $(t_n)_{n\in N}$ e considerando la classe

$$[(t_n)_{n\in N}] = \{(s_n)_{n\in N} : (s_n)_{n\in N} \text{ è equivalente a } (t_n)_{n\in N}\}.$$

In sostanza, gli elementi geometrici astratti sono le figure geometriche di una dimensione inferiore a quella dello spazio ambiente. Se ci si riferisce allo spazio euclideo tridimensionale, gli elementi geometrici astratti sono le superfici, le linee ed i punti.

Nell'insieme degli elementi geometrici è definita la relazione d'ordine indotta da quella di copertura.

Definizione 5.4. Si dice che un elemento geometrico $[(s_n)_{n\in N}]$ è *incluso* o che è *contenuto* in un elemento geometrico $[(t_n)_{n\in N}]$ se $(s_n)_{n\in N}$ è coperto da $(t_n)_{n\in N}$.

E' immediato vedere che la relazione di inclusione tra elementi geometrici è una relazione d'ordine. Ciò consente di definire i punti come quei particolari elementi geometrici che, in accordo con la definizione di Euclide, *"non hanno parti"*.

Definizione 5.5. Chiamiamo *punto* un elemento geometrico che non contiene propriamente nessun altro elemento geometrico.

Pertanto, in termini logici, contrariamente a quanto avviene di solito, un punto è un oggetto del secondo ordine mentre una regione è un oggetto del primo ordine.

Si noti che un punto non deve essere considerato come il risultato di un processo continuo di approssimazione ma, in un certo senso, come il processo di approssimazione. In tale senso, l'infinito attuale non viene necessariamente coinvolto in quanto il processo non deve essere necessariamente immaginato come terminato. Allo stesso modo, se si definiscono i numeri reali tramite le successioni di Cauchy, allora un numero reale è una successione di Cauchy (il processo) non è il limite di tale successione (il risultato del processo). Tale approccio, abbastanza generale in matematica, si basa sull'equazione

(*spazio di nuovi enti*) = *processi* + (*relazione di equivalenza tra processi*).

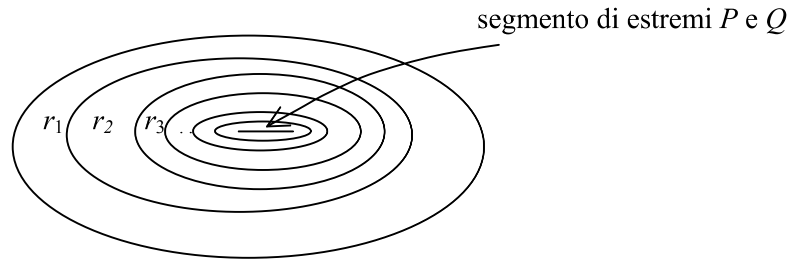
La nozione di connessione è di carattere topologico e può pertanto esprimere solo il livello topologico della spazio. Per poter passare ad un livello più propriamente geometrico è necessario definire la nozione di segmento. La proposta di Whitehead è di riferirsi ad una classe di regioni particolari, chiamate *ovali*. L'idea di ovale sembra corrispondere a quella, estremamente intuitiva, di regione dello spazio che non ha *"incavi"* e quindi pienamente coerente con la richiesta che i termini primitivi della nostra geometria debbano essere suggeriti direttamente dall'esperienza. Da un punto di vista geometrico gli ovali sembrano corrispondere alle regioni convesse dello spazio euclideo, cioè insiemi X godenti della proprietà che se due punti P e Q appartengono ad X allora tutti i punti del segmento PQ appartengono ad X.

Si propongono allora strutture del tipo ($\mathcal{R}$, C, Ov) con Ov classe di regioni chiamate *ovali*. Chiamerò *spazi affini senza punti* le strutture di questo tipo (supposte verificanti un opportuno sistema di assiomi). In tali strutture possiamo definire i segmenti come limiti di successioni di ovali

Definizione 5.6. Dati due punti P e Q, il *segmento tra* P e Q è l'elemento geometrico

a) contenente P e Q,
b) rappresentabile da un processo di astrazione costituito da ovali
c) minimale rispetto alle due condizioni di cui sopra.

Ovviamente è possibile definire in modo analogo anche la nozione di figura triangolare e di tetraedo.



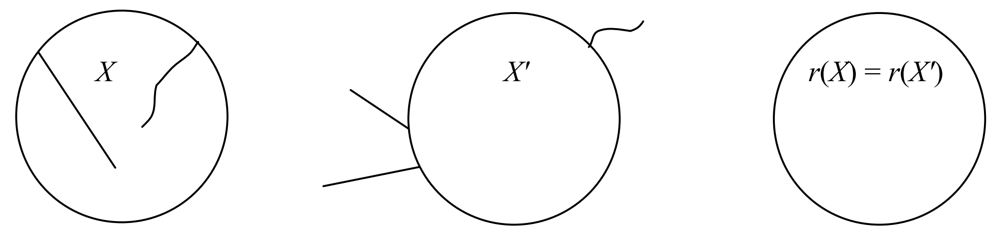
Una volta definita la nozione di segmento non ci sono difficoltà a definire tutte le altre nozioni della geometria affine. E' un problema aperto il trovare un sistema di assiomi $\mathcal{A}$ per gli spazi affini senza punti capace di caratterizzare lo spazio affine tridimensionale, ciò nel senso che se ($\mathcal{R}$, C, Ov) è un modello di $\mathcal{A}$, allora il sistema di punti e segmenti che si definiscono a partire da ($\mathcal{R}$, C, Ov) costituisce un modello dello spazio affine tridimensionale.

6. Modelli per le strutture di connessione.
Nel paragrafo 4 abbiamo esaminato le strutture di connessione dal punto di vista assiomatico. Altrettanto fondamentale è la ricerca di modelli matematici plausibili per le strutture di connessione. Come è stato fatto nell'ambito delle geometrie non euclidee, in cui si costruiscono i modelli non euclidei a partire dalla usuale geometria euclidea, la ricerca di modelli di geometria senza punti può avvenire all'interno della usuale geometria euclidea. Pertanto partiamo dallo spazio euclideo a tre dimensioni ed in questo ambiente cerchiamo una ragionevole definizione della nozione di "regione dello spazio" e della relazione di "connessione". Ora una prima questione che si pone è se i punti di frontiera di una regione debbano essere considerati appartenenti o meno alla regione stessa. Come modello euclideo di una stanza si deve assumere una regione aperta oppure una regione chiusa?

Ora non sembra che una tale distinzione abbia un significato per la nostra intuizione geometrica. Pertanto, almeno che non si voglia scrivere un libro di analisi matematica, sembrerebbe opportuno prescindere della frontiera nel definire la nozione di regione. Decidiamo allora di identificare due sottoinsiemi di punti che differiscono solo per punti della frontiera. Per fare questo, indichiamo con i e c gli operatori di interno e di chiusura, e consideriamo l'operatore r che si ottiene ponendo $r(X) = i(c(X))$. Tale operatore viene chiamato *regolarizzatore* e verifica la condizioni di idempotenza $r(r(X)) = r(X)$. Infatti, essendo $i(c(X)) \subseteq c(X)$, abbiamo anche che $c(i(c(X))) \subseteq c(X)$ e quindi $r(r((X))) \subseteq r(X)$. Inoltre, essendo $c(i(c(X)) \supseteq i(c(X))$ abbiamo che $r(r((X)) = i(c(i(c(X))) \supseteq i(c(X)) = r(X)$.

Definizione 6.1. Diciamo che due sottoinsiemi X e Y dello spazio euclideo sono *equivalenti* se risulta $r(X) = r(Y)$. Un sottoinsieme X dello spazio euclideo si chiama *aperto regolare* se $X = r(X)$.

Per quanto ora detto ogni sottoinsieme del tipo $r(X)$ è regolare. L'effetto del regolarizzatore è quello di togliere da una figura *"pezzi" o "tagli"* di dimensione inferiore a quella dello spazio ambiente. Ecco un esempio di due insiemi X ed X' che si regolarizzano entrambi nello stesso cerchio:



E' chiaro che un insieme e la sua chiusura sono equivalenti e che tutti i punti le linee e le superfici sono equivalenti all'insieme vuoto. Ancora, poiché $r(X) = r(r(X))$, ogni insieme X è equivalente al suo regolarizzato e quindi in ogni classe di equivalenza esiste uno ed un solo aperto regolare. In altre parole esiste una corrispondenza biettiva tra gli aperti regolari e le classi di equivalenza. Ciò suggerisce la seguente definizione.

Definizione 6.2. Chiamiamo *regione* ogni classe completa di equivalenza oppure, equivalentemente, ogni aperto regolare dello spazio euclideo.

Si noti che la classe degli aperti regolari dello spazio euclideo è una algebra di Boole senza atomi e quindi costituisce una base elegante per la costruzione di modelli. Volendo procedere più in generale, è possibile riferirsi ad un qualunque spazio topologico.

Definizione 6.3. Chiamiamo *canonico* un modello $(\mathcal{R}, C)$ del sistema di assiomi $A_1,...,A_6$ tale che:

- $\mathcal{R}$ è un insieme di aperti regolari di uno spazio topologico
- C è la relazione binaria in $\mathcal{R}$ definita ponendo

$$XCY \Leftrightarrow c(X) \cap c(Y) \neq \emptyset.$$

Un modello canonico "plausibile" potrebbe essere definito dalla classe degli aperti regolari limitati e connessi dello spazio euclideo. Un altro modello canonico si ottiene limitandosi alla classe delle sfere aperte. Si osservi che nel modello canonico definito dagli aperti regolari (non necessariamente limitati) le nozioni di punto e di figura geometrica non coincidono con quelle usuali della geometria euclidea. Infatti in tale caso ci si ritrova anche con enti geometrici "all'infinito". Per esempio, consideriamo la successione $(r_n)_{n\in N}$ dei semipiani $r_n = \{(x,y) \in R^2 : x > n\}$. Allora tale successione è un processo di astrazione che rappresenta una "figura geometrica" che non ha punti al finito (si veda anche l'esempio che segue).

Un esempio: definire 0^-, 0^+, $-\infty$ e $+\infty$. Un semplice esempio di struttura di connessione canonica è fornito dall'insieme degli intervalli aperti limitati del campo Q dei razionali. In tale caso i processi di astrazione sono noti in letteratura sotto il nome di *"nested sequences"* di intervalli e l'insieme dei punti coincide con l'insieme dei numeri reali. Riferendosi a tale esempio è possibile mostrare il motivo per cui i processi di astrazione sono definiti facendo riferimento alla inclusione non tangenziale piuttosto che alla semplice inclusione. Consideriamo infatti le successioni di intervalli definite da:

$$A_n = (-1/n,0)\ ;\ B_n = (0, 1/n)\ ;\ C_n = (-1/n, 1/n).$$

Naturalmente solo la terza successione è un processo di astrazione essendo una catena rispetto $\ll$. D'altra parte è immediato verificare che nessuna delle prime due successioni copre l'altra, mentre entrambe sono coperte dalla terza. Pertanto se ci si accontentasse della semplice inclusione nei processi di astrazione allora le tre successioni definirebbero tre distinti elementi geometrici 0^-, 0^+ e 0, con 0 contenente propriamente 0^- e 0^+. In particolare l'elemento geometrico 0 non sarebbe un punto perché non minimale, cosa questa abbastanza lontana dall'intuizione. Tuttavia una tale "patologia" potrebbe essere interessante e mediante essa si potrebbe rendere rigoroso l'uso dei simboli 0^-, 0^+ che spesso viene fatto in analisi matematica. Come vedremo nel seguito, è naturale sviluppare l'idea di uno spazio in cui i punti classici si "spezzano" in più punti. Si noti che un altro tipo di variazione che permette di ottenere nuovi punti si ottiene ammettendo come regioni anche intervalli non limitati superiormente ed intervalli non limitati inferiormente. In tale modo si ottengono come punti anche $-\infty$ e $+\infty$.

D'altra parte qualche cosa di simile viene fatto nell'analisi non-standard dove esistono numeri infiniti, numeri infinitesimi ed ogni numero reale esplode in una nuvola di numeri non-standard infinitamente vicini tra loro.

Concludiamo questo paragrafo osservando che, volendo definire la nozione di modello canonico di spazio affine senza punti, non possiamo più considerare gli spazi topologici ma dobbiamo riferirci a spazi in cui è definibile la nozione di convessità. Allora chiameremo *canonico* un modello di spazio affine senza punti ($\mathcal{R}$, C, Ov) tale che ($\mathcal{R}$, C) è un modello canonico di struttura di connessione definito in uno spazio euclideo ed Ov è la classe degli elementi convessi di $\mathcal{R}$.

7. Spazi metrici senza punti.
Uno dei più importanti approcci alla geometria è quello metrico. Ricordiamo che uno spazio metrico è definito da un insieme non vuoto M, i cui elementi sono chiamati *punti*, e da una funzione $d : M \to R^+$, chiamata *distanza*, tale che, per ogni x, y, z :

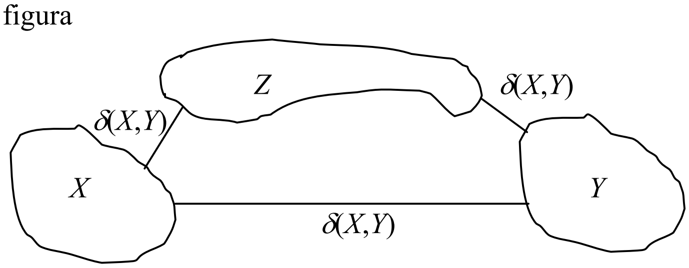
(1) $d(x, x) = 0$,
(2) $d(x,y) = d(y,x)$ (proprietà simmetrica)
(3) $d(x,y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (diseguaglianza triangolare)
(4) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Se sono verificate solo le proprietà (1), (2) e (3) la struttura (M, d) sarà chiamata *spazio pseudo-metrico*. Ad ogni spazio pseudo-metrico è associato uno spazio metrico (M',d) che è il quoziente di M modulo la relazione di equivalenza $\{(x,x') : d(x,y) = 0\}$. Più precisamente, avremo che $M' = \{[x] : x \in M\}$ dove, per ogni $x \in M$, $[x] = \{x' : d(x,x') = 0\}$. Inoltre poniamo $d([x],[y]) = d(x,y)$.

Ora, se si vuole trovare una nozione analoga a quella di spazio metrico che però si riferisca alle regioni dello spazio, conviene ammettere per un momento che le regioni siano sottoinsiemi di uno spazio metrico. Ciò consente di fare riferimento alla nota definizione di distanza tra due insiemi X ed Y ottenuta ponendo

$$\delta(X,Y) = Inf\{d(x,y) : x \in X,\ y \in Y\}. \tag{7.1}$$

Naturalmente δ non è una metrica poiché da $\delta(X,Y) = 0$ non segue che $X = Y$. Non è nemmeno una pseudo-metrica non essendo verificata la diseguaglianza triangolare. Per rendersene conto basta osservare la seguente figura



dove appare evidente che $\delta(X,Y) > \delta(X,Z) + \delta(Z,Y)$. D'altra parte l'intuizione suggerisce che se si considerano regioni "molto piccole" allora δ deve verificare, almeno approssimativamente, le proprietà di uno spazio metrico. Facciamo allora entrare in gioco un'altra nozione che in qualche modo sia capace di dare conto del concetto di "regione piccola": la nozione di diametro. Ricordiamo che il diametro $|X|$ di un insieme X non vuoto è definito tramite

$$|X| = Sup\{d(x,y) : x \in X, y \in X\}. \tag{7.2}$$

Possiamo ora proporre una diseguaglianza che in qualche modo gioca il ruolo della diseguaglianza triangolare. Infatti, come non è difficile verificare, vale la seguente relazione

$$\delta(X,Y) \leq \delta(X,Z) + \delta(Z,Y) + |Z|$$

la quale, se si considerano solo regioni con diametri trascurabili, viene a coincidere proprio con la diseguaglianza triangolare. Ciò suggerisce la seguente definizione (si veda Gerla [25]).

Definizione 7.1. Una struttura ($\mathcal{R}$, $\leq$, δ, $|\ |$) prende il nome di *spazio pseudo-metrico senza punti* (in breve *p-p-m*-spazio) se $\leq$ è una relazione d'ordine in $\mathcal{R}$ e
$\delta : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to R^+$ e $|\ | : \mathcal{R} \to R^+$ sono funzioni tali che:

A_1 $x \leq y \Rightarrow |x| \leq |y|$ (crescenza del diametro),

A_2 $\delta(x,y) = \delta(y,x)$ (simmetria),
A_3 $x_1 \geq x_2 \Rightarrow \delta(x_1,y) \leq \delta(x_2,y)$ (decrescenza della distanza) ,
A_4 $\delta(x,x) = 0$,
A_5 $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y) + |z|$ (diseguaglianza triangolare).

Gli elementi di $\mathcal{R}$ sono chiamati *regioni*, la relazione $\leq$ *relazione di inclusione*, δ *funzione distanza* e $|\ |$ *funzione diametro.* Non è difficile trovare esempi di *p-p-m*-spazi. Ad esempio supponiamo che $\mathcal{R}$ sia uguale ad una classe di aperti regolari limitati (non vuoti) di uno spazio metrico, e che $\leq$ sia la relazione di inclusione. Definiamo inoltre δ e $|\ |$ tramite (7.1) e (7.2). E' immediato provare allora che $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\ |)$ costituisce un *p-p-m*-spazio. Chiameremo *canonico* un *p-p-m*-spazio di tale tipo.

Anche per i *p-p-m*-spazi possiamo procedere ad una opportuna "costruzione-definizione" dei punti che in qualche modo riproduce il processo di astrazione. Ora siamo spesso abituati a dire che un punto (un punto materiale) si può rappresentare come una regione (un corpo) "molto piccola" intendendo dire con tale espressione che quanto più piccola è la regione (il corpo) cui ci si riferisce tanto più precisa risulta la rappresentazione. Ciò suggerisce la seguente definizione che corrisponde a quella dei processi di astrazione di Whitehead.

Definizione 7.2. Sia $<x_n>$ una successione decrescente di regioni tale che $lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$. Allora tale successione è detta essere un *rappresentante di un punto*, o, più semplicemente, *un rappresentante*. Indichiamo con M' l'insieme dei rappresentanti di punto.

Il secondo passo è definire una distanza $d : M' \times M' \to R^+$ tra rappresentanti. A tale scopo poniamo

$$d(<x_n>,<y_n>) = lim_n\, d(x_n,y_n) \tag{7.3}$$

per ogni $<x_n>,<y_n>$ in M'. Come era prevedibile, (M',d) è uno spazio pseudometrico che non è, in generale, uno spazio metrico. Tuttavia, come abbiamo già osservato, è possibile costruire uno spazio metrico considerando un opportuno quoziente di (M',d). Precisamente, chiamiamo *equivalenti* due rappresentanti la cui distanza sia nulla e chiamiamo *punto* $[<x_n>]$ una classe completa di equivalenza di rappresentanti

$$[<x_n>] = \{<y_n> \mid d(<x_n>,<y_n>) = 0\}. \tag{7.4}$$

Infine indichiamo con M l'insieme dei punti. La funzione d induce una funzione in M, che indichiamo ancora con d, ponendo

$$d([<x_n>],[<y_n>]) = lim_n d(x_n,y_n) \tag{7.5}$$

per ogni coppia di punti $[<x_n>]$ e $[<y_n>]$.

Theorema 7.3. (M,d) è uno spazio metrico, che viene detto *spazio metrico associato a* $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\ |)$.

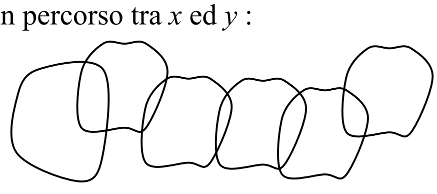
Sarebbe interessante trovare un sistema di assiomi per $(\mathcal{R}, \leq, \delta, |\ |)$ in modo che lo spazio metrico associato (M,d) sia isomorfo allo spazio metrico euclideo a tre dimensioni.

8. Come costruirsi un *p-p-m*-spazio.

Per costruire un *p-p-m*-spazio è sufficiente assumere come concetto primitivo solo un diametro $|\ \ |$, definendo poi in modo opportuno una distanza d. Per mostrare come ciò sia possibile, detto $(\mathcal{R},\leq)$ un insieme ordinato, chiamiamo *sovrapposti* due elementi x ed x' di $\mathcal{R}$ per i quali esiste $y\in\mathcal{R}$ (diverso dall'eventuale minimo) tale che $y\leq x$ ed $y\leq x'$. Inoltre, diamo le seguenti definizioni:

- un *percorso tra x ed y* è una successione $x_1,\ldots,x_n$ di elementi di $\mathcal{R}$ tale che x è sovrapposto ad x_1, x_i è sovrapposto a x_{i+1} per $i = 1, \ldots,n$-1, ed x_n è sovrapposto ad y.

Ecco come si può visualizzare un percorso tra x ed y :



x_1 y

x x_2 x_3 x_4

Proposizione 8.1. *Sia* ($\mathcal{R}$, $\leq$) *un insieme ordinato tale che due elementi di* $\mathcal{R}$ *siano sempre collegabili da una percorso e sia* $|\ |$: $\mathcal{R} \to R^+$ *una funzione crescente*. Definiamo inoltre una funzione $d_{|\,|}:\mathcal{R}\times\mathcal{R}\to R^+$ *ponendo* $d_{|\,|}(x,y) = 0$ *se* $x = y$ *e*

$$d_{|\,|}(x,y) = Inf\{|x_1| + ... + |x_n| \ : \ x_1, ...,x_n \text{ è un percorso tra } x \text{ ed } y\}$$

altrimenti. *Allora la struttura* ($\mathcal{R}$, $\leq$, $d_{|\,|}$, $|\ |$) *è un p-p-m-spazio*.

In un certo senso $d_{|\,|}(x,y)$ è la misura della distanza tra x e y lungo "sentieri effettivamente percorribili".

E' anche possibile assumere come concetto primitivo la sola funzione-distanza d definendo poi in modo opportuno un diametro $|\ |_d$.

Proposizione 8.2. *Sia* ($\mathcal{R}$,$\leq$) *un insieme ordinato e* $d : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \to R^+$ *una funzione verificante* A_2-A_3-A_4. *Definiamo inoltre la funzione* $|\ |_d :\mathcal{R} \to R^+$ *ponendo*

$$|z|_d = Sup\{d(x,y) - d(x,z) - d(z,y) : x, y \in \mathcal{R}\}.$$

Allora,se il valore $|z|_d$ *è semprefinito, la struttura* ($\mathcal{R}$, $\leq$, $|\ |_d$, d) *è un p-p-m-spazio.*

In un certo senso $|z|_d$ è una misura di quanto *non* valga la diseguaglianza triangolare quando z sia uno dei vertici di un triangolo.

Le due proposizioni ora enunciate suggeriscono vari modi per costruire *p-p-m*-spazi. Naturalmente l'ideale sarebbe ottenere il *p-p-m-spazio* euclideo con un processo che riproduce il più fedelmente possibile le operazioni che effettivamente vengono fatte per la misurazione delle distanze. Per fare un esempio, supponiamo che ($\mathcal{R}$, $\leq$) sia un insieme ordinato e che G sia un gruppo di automorfismi di tale struttura, cioè un gruppo di funzioni invertibili $g : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ tali che $x\leq y \Leftrightarrow g(x)\leq g(y)$. Chiamiamo *movimenti* gli elementi di G. Diciamo che due regioni r ed r' sono *equivalenti* se esiste $g\in G$ tale che $g(r) = r'$. Consideriamo inoltre una catena $r_0 > r_1 > r_2 > ...$ discendente infinita di elementi di $\mathcal{R}$ non a due a due non equivalenti. Chiamiamo *regolo-prototipo* ogni elemento di tale catena mentre chiamiamo *regolo* ogni regione che sia equivalente ad un regolo-prototipo. Detto *Reg* l'insieme dei regoli, possiamo definire la funzione $l : Reg \to Q^+$, ponendo $l(r) = 10^{-i}$ se r è equivalente al regolo-prototipo r_i. In definitiva r_0 è il regolo-prototipo unitario, r_1 il regolo-prototipo di lunghezza 10^{-1} e così via. Ciò permette di definire una distanza d in $\mathcal{R}$ ponendo, per ogni $x,y \in \mathcal{R}$, $d(x,y) = 0$ se x si sovrappone ad y e

$$d(x,y) = Inf\{l(r_1)+...+l(r_n) : r_1,...,r_n \text{ percorso di regoli tra } x \text{ e } y\}$$

altrimenti. Non è difficile verificare che la funzione d verifica A2, A3 ed A4 e quindi, per la Proposizione 8.2, che ($\mathcal{R}$, $\leq$, d, $|\ |_d$) è un *p-p-m*-spazio. Sarebbe interessante trovare un semplice sistema di assiomi da imporre alle strutture ($\mathcal{R}$,$(r_i)_{i\in I}$,G) perché lo spazio metrico associato a ($\mathcal{R}$, $\leq$, d, $|\ |_d$) sia quello euclideo. Una impostazione della geometria basata su un tale sistema di assiomi potrebbe essere didatticamente più efficace in quanto si riferirebbe in modo diretto alle esperienze di misurazione degli studenti. Qualche suggerimento su come si possa basare la geometria sulla nozione di regione e di movimento può essere fornito dall'interessante libro di H. J. Schmidt [28].

9. Tornando ai gatti.

Torniamo alla questione da cui siamo partiti, cioè se abbia senso parlare di un punto dall'aspetto di gatto. Come ormai dovrebbe essere chiaro, è possibile dare una risposta positiva alla questione: basta modificare opportunamente le definizioni di punto che abbiamo esposto. Infatti potremmo "rafforzare" la relazione di equivalenza già proposta per rappresentanti di punto e richiedere, per esempio, che due rappresentanti per essere equivalenti debbano anche essere costituiti di regioni "con la stessa forma". Ad esempio, supponiamo che $(s_n)_{n\in N}$ sia una successione di sfere con centro in un punto P e tali che il diametro di s_n sia $1/n$ e che $(c_n)_{n\in N}$ sia una successione di cubi di centro P il cui lato sia $1/n$. Tali successioni sono rappresentanti di punto che si coprono a vicenda e che quindi sono equivalenti. Di fatto rappresentano entrambi il punto P. Tuttavia potremmo decidere che la relazione di "copertura reciproca" non sia soddisfacente e che sarebbe meglio applicare un livello di astrazione non tanto spinto da trascurare la differenza tra le forme delle regioni delle due successioni. In tale caso si verrebbero a definire punti con forme diverse; uno sferico ed uno cubico.

Non è difficile formalizzare un tale modo di procedere e definire la nozione di *"punto con una data forma"*. Chiamiamo *similitudine di rapporto k* una trasformazione f che conserva l'inclusione e tale che, per ogni coppia r ed s di regioni

$$d(r,s) = k \cdot d(f(r),f(s)) \ , \quad |r| = k \cdot |f(r)|.$$

Chiamiamo *simili* due regioni che sono una l'immagine dell'altra tramite una similitudine. Poiché l'insieme delle similitudini costituisce un gruppo, la relazione di similitudine tra regioni è di equivalenza. Chiamiamo *forma* una classe completa di equivalenza rispetto la relazione di similitudine. Data una forma α, diciamo che un rappresentante di punto $(r_n)_{n\in N}$ *ha la forma* α se tutte le regioni r_n appartengono ad α. Indichiamo con *RPF* l'insieme dei rappresentanti di punti con una forma. Due elementi $(r_n)_{n\in N}$ e $(t_n)_{n\in N}$ in *RPF* si dicono *equivalenti* se:

- si coprono a vicenda
- le regioni di $(r_n)_{n\in N}$ hanno la stessa forma delle regioni di $(t_n)_{n\in N}$.

Chiamiamo *punto con forma* una classe completa di equivalenza.

Supponiamo ora di applicare tale definizione al modello canonico euclideo, allora l'universo dei punti esplode ed ogni punto euclideo (che rappresenta tradizionalmente solo una posizione nello spazio) si moltiplica in una miriade di punti quadrati, rotondi esagonali, etc... .

Quello che si è fatto è di applicare un processo di astrazione che conserva non solo la posizione ma anche una qualche proprietà degli oggetti approssimanti (nel nostro caso la forma). Riferendosi ad altre proprietà non è difficile definire punti con particolari "qualità", ad esempio i punti colorati, i punti che ruotano intorno a se stessi, punti con una direzione ed altro. In definitiva, parafrasando W. Shakespeare, possiamo dire che esistono più punti nell'universo matematico di quanto possa immaginare l' usuale geometria.

Ad esempio consideriamo la questione dei punti che ruotano intorno a se stessi che, come abbiamo già osservato, nella geometria euclidea appare senza significato. L'intuizione ci dice che l'idea di punto che ruota su se stesso nasce per astrazione dal considerare un qualunque corpo che ruoti intorno a se stesso e che sia abbastanza piccolo da poter essere assimilato ad un punto. Quanto più è piccolo tale corpo, quanto più è lecito considerarlo un punto. Appare quindi naturale definire un punto che ruoti intorno a se stesso come limite di una sequenza di regioni sempre più piccole che ruotano intorno a se stesse.

Concludendo, abbiamo visto che è possibile definire un punto dall'aspetto di un gatto ed affermare che tale punto ruota verso noi sorridendo.

- Hai ragione, - disse il Gatto - e questa volta svanì adagio adagio cominciando con la fine della coda e finendo col sorriso, il quale rimase per qualche tempo sul ramo, dopo che tutto era svanito.
- Curioso! ho visto spesso un gatto senza sorriso; - osservò Alice, - mai un sorriso senza Gatto. È la cosa più strana che mi sia capitata! (*L. Carroll, Alice nel paese delle meraviglie*).

BIBLIOGRAFIA

Di carattere generale.

[1] S. Borgo, N. Guarino, C. Masolo, *Stratified Ontologies: The Case of Physical Objects*, ECAI-96 Workshop on Ontological Engineering.

[2] S. Borgo, N. Guarino, C. Masolo, A Naive Theory of Space and Matter, in P. Amsili, M. Borillo, and L. Vieu (eds.), *Time, Space and Movement: Meaning and Knowledge in the Sensible World* (Proceedings of the 5th International Workshop), Toulouse: COREP, 1995, pp. 29–32.
[3] R. Casati, A. Varzi, *Buchi e altre superficialità*, Garzanti (1996).
[4] A. Frajese, *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, (1971).
[5] G. Gerla, Pointless geometries, in *Handbook of Incidence Geometry*, F. Buekenhout and W. Kantor (eds) 1994 North-Holland.
[6] Sesto Empirico, *Contro i matematici*, Laterza 1972.

Strutture di connessione.
[7] L. Biacino, G. Gerla, Connection structures, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32 (1991) 242-247.
[8] B. L. Clarke, A calculus of individuals based on "connection", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 22 (1981) 204-218.
[9] B. L. Clarke, Individuals and points, *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 26 (1985) 61-67.
[10] T. De Laguna, Point, line and surface as set of solids, *The Journal of Philosophy*, 19 (1922) 449-461.
[11] G. Gerla, R. Tortora, La relazione di connessione in A. N. Whitehead: aspetti matematici, *Epistemologia*, 15 (1992) 341-354.
[12] G. Gerla, R. Tortora, Dissezioni e intersezioni di regioni in A. N. Whitehead, *Epistemologia*, 19 (1996) 289-308.
[13] A. Grzegorczyk, Axiomatizability of geometry without points, *Synthese* 12 (1960) 228-235.
[14] E. V. Huntington, A set of postulates for abstract geometry expressed in terms of the simple relation of inclusion, *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, Cambridge (1912) 466-470.
[15] E. V. Huntington, Postulates for abstract geometry, *Mathematische Annalen*, 73 (1913) 522-559.
[16] H. S. Leonard, N. Goodman, The calculus of individuals and its uses, *The Journal of Symbolic Logic*, 5 (1940) 45-55.
[17] N. I. Lobacevskij, *Nuovi principi della geometria*, Ed. Boringhieri (1955).
[18] W. Noll, The geometry of contact, separation, and reformation of continuous bodies, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 122 (1993) 197-212.
[19] P. A. Rovatti, *La dialettica del processo: saggio su Whitehead*, Mondadori Editore, Milano 1969.
[20] T. Sullivan, Affine geometry having a solid as primitive, *Notre Dame Journal of formal Logic*, 12 (1971) 1-61.
[21] A. N. Whitehead, *An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambr. Univ. Press, Cambrige 1919.
[22] A. N. Whitehead, *The concept of Nature*, Cambr. Univ. Press, Cambrige 1920.
[23] A. N. Whitehead, *Process and Reality*, The Macmillan Co., New York 1929.

Approccio metrico.
[24] G. Gerla., R. Volpe, Geometry without points, *The American Math. Monthly*, 92 (1985) 707-711.
[25] G. Gerla, Pointless metric spaces, *The Journal of Symbolic Logic*, 55 (1990), 207-219.
[26] G. Gerla, Pointless metric spaces and fuzzy spaces, in *Applications of Category Theory to Fuzzy Subsets*, E. P. Klement, U. Hohle, S. E. Rodabaugh (eds), Kluwer (1991) 236-244.
[27] G. Gerla, Distances, diameters and verisimilitude of theories, *Archive for Mathematical Logic*, 31 (1992) 407-414.
[28] H. J. Schmidt, *Axiomatic Characterization of Physical Geometry*, Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1979.