

INDICE

Introduzione

CAPITOLO 1

LA MATEMATICA PRESSO I GRECI

1. La Scuola Pitagorica: tutto il mondo è aritmetica	1
2. Crisi della Scuola Pitagorica (ma gli interi non bastano)	5
3. Dimostrare e dimostrare per assurdo	11
4. Il continuo geometrico per evitare l'infinito attuale	13
5. Punti, linee e Platonismo	16
6. Gli elementi di Euclide	19
7. La teoria delle grandezze omogenee (al posto dei numeri reali) ...	25
8. La teoria delle proporzioni (al posto delle operazioni)	29
9. Misure, equiscomponibilità, equicompletabilità	32
10. L'equiscomponibilità è un metodo universale	36
11. Equiscomponibilità ed intuizione	40
12. Contro i matematici	42
Lettura: <i>Platone e la duplicazione del quadrato</i>	49
Lettura: Gerla, <i>Un punto dal volto di gatto</i>	59

CAPITOLO 2

CRISI DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA

1. Crisi del carattere assoluto della geometria	77
2. Modelli di geometrie non euclidee	81
3. Altre geometrie	84
4. Crisi dell'approccio sintetico: Cartesio	85
5. Calcolo dei segmenti	87
6. Il "Discorso sul Metodo"	90
7. Aritmetizzazione della geometria: la sparizione delle figure	93
8. Intuizione geometrica e falsi teoremi euclidei	95
9. Altri falsi teoremi	99
10. Divagazioni: figure geometriche ed equiscomponibilità	103

CAPITOLO 3

DEFINIRE I NUMERI

1. Un punto di partenza: terne di Peano	107
2. Principio di induzione	110
3. Definizione per ricorsione	112
4. Somma e prodotto in una terna di Peano	117
5. Definire una relazione d'ordine in una terna di Peano	118
6. Variazioni sul principio di induzione	120
7. L'anello degli interi relativi	124
8. Il campo dei razionali	127
9. I numeri reali tramite le sezioni	130
10. I numeri reali tramite le successioni di Cauchy	133
11. Il problema della rappresentazione dei numeri	137
12. Un percorso diverso: essere quasi uguali	139
13. I razionali non-standard	142
Lettura: Zavattini, <i>Gara di matematica</i>	149

CAPITOLO 4

STRUMENTI DI CALCOLO

1. Gli abachi: calcolare con sassi e palline	151
2. Vari tipi di abaco	152
3. I bastoncini di Nepero	158

4. Un antico calcolatore analogico: riga+compasso	161
5. Teoremi limitativi per la macchina riga+compasso	163
6. Un potente calcolatore analogico: il regolo calcolatore	167
7. Pascal e Leibniz: filosofi che fabbricano calcolatrici	170
8. Babbage, Ada Lovelace e la programmazione	173
9. Turing: logica matematica e teoria astratta dei calcolatori	175
10. Teoremi limitativi per i calcolatori	179

APPENDICE
NOZIONI BASE E VARIE

1. Coppie e prodotti cartesiani	183
2. Definizione (brutta) di n -pla	184
3. Relazioni di equivalenza e quozienti	186
4. Relazioni d'ordine, reticoli ed algebre di Boole	188
5. Relazioni di buon ordine	191
6. Qualche proprietà	193
7. Due paradossi contro il buon ordinamento dei naturali	197
8. Gruppi, anelli e campi	198
9. Anelli ordinati	199
10. La nozione generale di struttura del primo ordine	202

Indice analitico	207
Bibliografia	211

INTRODUZIONE

Questo è il primo di due volumetti che raccolgono i miei appunti per i corsi di Matematiche Complementari e che si propongono di introdurre il lettore alle problematiche relative ai fondamenti della matematica. Essi si occupano dei vari tentativi fatti da matematici e filosofi per fornire basi sicure alla matematica e per capirne i “principii primi” (ammesso che alla matematica si possa dare una base definitiva ed ammesso che per essa esistano principii primi). Poiché gli appunti sono scritti per studenti di un corso della laurea di Matematica, spesso si troveranno definizioni precise ed un po’ pedanti e, principalmente, dimostrazioni di teoremi. Tuttavia credo che, almeno questo primo volume, possa essere letto da tutti poiché esiste l’antico diritto di chi legge di saltare pagine, dimostrazioni e parti noiose (attenzione ! i miei studenti sono esclusi da tale diritto).

Ovviamente si pone la questione:

esiste veramente l'esigenza di un tale tipo di riflessione sulla matematica ?

Dopotutto sembra non esistere niente di più semplice e sicuro di nozioni come quelle di numero, punto, retta. Purtroppo semplicità e sicurezza sono illusioni come mostrano i vari paradossi emersi nel corso dell’evoluzione della matematica. Il fatto è che siamo tanto abituati a manipolare i concetti matematici che tendiamo a confondere la familiarità che abbiamo acquisito con la conoscenza di tali concetti. Un po’ avviene come per il nostro giornalista o salumiere che pensiamo di conoscere solo perché sono venti anni che facciamo acquisti da loro (ma poi non sappiamo nemmeno dove abitano o se sono sposati o no). Proviamo però ad essere meno superficiali ed a porci domande del tipo:

- che cosa sono i numeri?
- che cosa è un punto, una retta?
- i numeri, i punti le rette sono invenzioni dell'uomo, di un dio oppure esistono in natura?
- che cosa è la matematica?
- i risultati della matematica sono sicuri? e, se sono sicuri, perché lo sono?
- esiste l'infinito di cui spesso parla la matematica ?
- perché la matematica, che non sembra avere a che fare con l'esperienza, è utile per le scienze empiriche e per le applicazioni ?

(ho detto meno superficiali !!! chi avesse letto troppo rapidamente deve tornare indietro e riflettere su ciascuna domanda fino a quando non abbia raggiunto uno stato di confusione abbastanza avanzato). Ci accorgiamo allora che tali questioni sono molto più problematiche di quanto appaia a prima vista. Ad esse persone diverse hanno dato e danno risposte diverse. Questo fatto si esprime dicendo che:

sono esistite ed esistono diverse "filosofie" della matematica.

Il mio punto di vista, che credo sia quello della maggioranza dei matematici che si interessano a queste cose, è che non abbia molto senso la pretesa di “fondare” la matematica una volta per tutte ma che invece sia interessante “viaggiare” tra le diverse intuizioni e pratiche dei matematici per vederne i collegamenti

logici, le potenzialità ed i limiti. E' questo forse l'unico modo per tentare di capire qualche cosa di più sulla natura della matematica.

I due volumi non sono libri di storia della matematica anche se a volte si accenna a qualche riferimento storico come collante del discorso. In essi sono poi evidenti alcune lacune. Ad esempio lo spazio dedicato alla trattazione dell'intuizionismo non corrisponde certo alla importanza ed all'originalità di questa filosofia della matematica. Questa mancanza deriva dalla mia pigrizia e non dal misconoscimento di questo argomento. Inoltre il ruolo della logica nelle questioni dei fondamenti richiederebbe da solo lo spazio di un paio di volumi.

Insomma, per un discorso più approfondito e più completo si rimanda a libri più "solidi".

P.S. : Il mio indirizzo è gerla@unisa.it e ricevo volentieri commenti, segnalazioni di errori o richieste di chiarimenti. L'indirizzo della mia homepage, dove può essere trovato un po' di materiale scientifico e didattico, è:

<http://www.dipmat.unisa.it/people/gerla/www/>