

## INDICE

### Introduzione

#### CAPITOLO 1

##### GLI INSIEMI: CREDERE NELL' INFINITO

1. Il prezzo dell'aritmizzazione: l'infinito attuale .....	1
2. Ma questi insiemi sono poi veramente una novità ? .....	5
3. I paradossi dell' infinito .....	8
4. Cantor, l'infinito e la Dottrina Cristiana .....	11
5. Confrontare le grandezze degli insiemi .....	13
6. Cosa significa essere infinito ? .....	16
7. Insiemi numerabili .....	21
8. Tentare di superare il numerabile: più tipi di infinito ? .....	24
9. La potenza del continuo .....	28
10. Superare la potenza del continuo .....	35
11. Divagazioni: insiemi ripetitivi, vaghi, rozzi .....	40
<b>Letture:</b> R. Rucker, <i>L'albergo di Hilbert</i> .....	45
<b>Letture:</b> G. Gerla, <i>Nel paese del Destino</i> .....	47
<b>Lezione:</b> <i>Un esempio di seminario in un liceo</i> .....	53

#### CAPITOLO 2

##### ALTRI TEOREMI ED ALTRI NUMERI

1. Teorema di Cantor-Bernstein: è tanto ovvio che valga ? .....	71
2. Cercarne una dimostrazione .....	72
3. Trarre altre informazioni dalla dimostrazione .....	75
4. Le dimostrazioni di Borel e König .....	79
5. Equiscomponibilità e paradosso di Vitali .....	83
6. Il Paradosso di Banach-Tarski .....	86
7. Nuovi numeri: i numeri cardinali .....	88
8. Algebra dei cardinali.....	89
9. Nuovi numeri: i numeri ordinali .....	92
10. Algebra degli ordinali .....	94
11. Riassumendo sui possibili numeri .....	99

#### CAPITOLO 3

##### METODO ASSIOMATICO E STRUTTURALISMO

1. Paradossi e crisi della teoria degli insiemi .....	97
2. Russell, il paradosso del barbiere, Marx e le studentesse .....	101
3. Affrontare i paradossi: intuizionismo e metodo assiomatico .....	102
4. Un approccio assiomatico alla geometria .....	106
5. Un approccio assiomatico ai numeri reali .....	111
6. Assiomi per evitare i paradossi della teoria degli insiemi .....	114
7. La teoria di Zermelo-Fraenkel .....	117
8. Assioma della scelta .....	121
9. Dimostrare o confutare l'assioma della scelta .....	124
10. Ipotesi del continuo .....	126
11. Categoricità, consistenza, indipendenza, completezza .....	127
12. Tre diverse ideologie per il metodo assiomatico .....	130
13. Divagazioni: strutturalismo e divisione del lavoro .....	136

#### CAPITOLO 4

##### LA LOGICA PER I FONDAMENTI

1. Hilbert contro l'infinito .....	141
2. L'infinito è solo una parola .....	144

3. Nuovi oggetti matematici: parole e linguaggi .....	146
4. Rappresentabilità, definibilità e numerabilità .....	150
5. Linguaggio ed apparato deduttivo per la logica formale .....	152
6. Ma si deve pur parlare di qualche cosa: l'interpretazione .....	157
7. Cosa è la verità .....	161
8. Teorema di completezza e teoremi limitativi .....	163
9. Matematica dal punto di vista della effettiva calcolabilità.....	168
10. E' sempre possibile addizionare due numeri reali? .....	172
11. Un po' di storia: la teoria dei sillogismi di Aristotele .....	177
12. Il contributo degli stoici .....	182
13. Diagrammi di Eulero-Venn, algebre di Boole, sillogismi .....	183
14. Limiti della logica Aristotelica .....	188
15. Ma Leibniz aveva le idee chiare .....	190

## **CAPITOLO 5**

### **PROBABILITA' E CATEGORIE**

1. Introduzione .....	193
2. Definizione classica di probabilità .....	195
3. Definizione frequentista e definizione soggettiva .....	197
4. Definizione assiomatica .....	200
5. Qualche nozione e qualche proposizione .....	201
6. Alcuni paradossi della probabilità .....	203
7. La teoria delle categorie .....	209
8. Globale e locale .....	212
9. Funtori ed isomorfismi tra categorie .....	215
10. Teoria delle categorie per i fondamenti .....	217

## APPENDICE

### CALCOLARE CON OPERATORI

1. Sistemi di chiusura, operatori e punti fissi ..... 219
2. Due teoremi di punto fisso per operatori ..... 221
3. Come generare relazioni di ordine o di equivalenza ..... 225

**Indice analitico** ..... 229

**Bibliografia** ..... 235



## INTRODUZIONE

Questo è il secondo dei due volumetti in cui raccolgo i miei appunti per il corso di Matematiche Complementari. Come detto nel sottotitolo, l'attenzione viene concentrata sulla matematica che si è sviluppata in seguito alla scoperta della teoria degli insiemi. In accordo con quanto detto nella introduzione al primo volume, il punto di vista che assumo non è proporre una particolare "fondazione" della matematica ma piuttosto viaggiare tra le difficoltà ed i problemi che nascono quando si tenta di trovare una qualche fondazione. A mio parere questo è un modo per capire un po' di più la natura della matematica.