

tt-riducibilità e limiti ricorsivi

G. CRISCUOLO (*) e G. GERLA (**) (Napoli)

SUMMARY - *In this work we give an algebraic characterization of the class of all sets *tt*-reducible to a given set extending the analogous well known result relative to the *btt*-reducibility. Furthermore we prove that the class of all sets *tt*-reducible to *K* coincides with a particular class of limit recursive sets, which is obtained from the definition of *k*-trial sets given by Putnam, by changing the constant *k* with a recursive function of the input.*

0. Un insieme A è detto insieme limite se esiste una funzione totale ricorsiva $f(x, n)$ tale che:

$$x \in A \implies \lim f(x, n) = 1$$

$$x \notin A \implies \lim f(x, n) = 0.$$

Tale definizione coincide con quella di « predicato a tentativi ed errori » data da Putnam [1] e con la definizione di « insieme limite ricorsivo » data da Gold [2].

Entrambi hanno dimostrato che la classe degli insiemi limite coincide con l'algebra di Boole degli insiemi Turing-riducibili a K cioè con Δ_2 .

Putnam inoltre definisce in [1] i *k*-trial sets come quegli insiemi limite per cui, detta $f(x, n)$ la corrispondente funzione ricorsiva,

Entrato in Redazione il 13-5-75.

(*) Istituto di Fisica Teorica dell'Università, Mostra d'Oltremare pad. 19 - 80125 Napoli, Italy.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

esiste un intero k tale che :

$$|\{n / f(x, n) \neq f(x, n+1)\}| \leq k.$$

Egli dimostra che la classe dei k -trial sets coincide con l'algebra di Boole degli insiemi *btt*-riducibili a K oppure equivalentemente con l'algebra di Boole generata dagli insiemi ricorsivamente numerabili.

In questo lavoro noi caratterizziamo l'algebra di Boole degli insiemi *tt*-riducibili a K come la classe di quei limiti per cui esiste una funzione totale ricorsiva $e(x)$ tale che :

$$|\{n / f(x, n) \neq f(x, n+1)\}| \leq e(x).$$

Dimostriamo tale risultato come conseguenza del Teorema 1 in cui si caratterizza la classe degli insiemi *tt*-riducibili ad un qualsiasi insieme B , generalizzando un analogo teorema relativo alla *btt*-riducibilità (ad es. Th. IX paragrafo 14.6 di Rogers [3]).

1. Diamo ora alcune definizioni che ci permetteranno di caratterizzare algebricamente la classe degli insiemi *tt*-riducibili ad un insieme B .

DEFINIZIONE 1. Dato un insieme A , una successione $(A_n)_{n \in N}$ di insiemi ed una funzione totale ricorsiva $e(x)$, diremo che A è la e -unione della successione $(A_n)_{n \in N}$ e scriveremo

$$A = \bigcup_{n \in N}^{e(x)} A_n$$

se :

$$a) \quad A = \bigcup_{n \in N} A_n$$

$$b) \quad x \in A \iff x \in \bigcup_{n=0}^{n=e(x)} A_n$$

oppure equivalentemente se :

$$a') \quad A \supseteq \bigcup_{n \in N} A_n$$

$$b') \quad x \in A \implies x \in \bigcup_{n=0}^{n=e(x)} A_n.$$

DEFINIZIONE 2. Dato un insieme A , una successione $(A_n)_{n \in N}$ di insiemi ed una funzione totale ricorsiva $e(x)$, diremo che A è la e -intersezione della successione $(A_n)_{n \in N}$ e scriveremo

$$A = \bigcap_{n \in N}^{e(x)} A_n$$

se:

$$a) \quad A = \bigcap_{n \in N} A_n$$

$$b) \quad x \in A \iff x \in \bigcap_{n=0}^{n=e(x)} A_n$$

oppure equivalentemente se:

$$a') \quad A \subseteq \bigcap_{n \in N} A_n$$

$$b') \quad x \in \bigcap_{n=0}^{n=e(x)} A_n \implies x \in A.$$

È possibile ora dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 1: Sia B un insieme diverso da $\emptyset$ e da N , allora $A \leq_u B$ se e soltanto se esistono delle funzioni totali ricorsive $g(x)$, $e(x)$, $h(i, j)$ e $k(i, j)$ tali che $\forall i, j \in N$, $\varphi_{h(i, j)}$ e $\varphi_{k(i, j)}$ sono funzioni totali ricorsive ed inoltre:

$$(1) \quad A = \bigcup_{i \in N}^{g(x)} \bigcap_{j \in N}^{e(x)} B_{ij} - B'_{ij}$$

con

$$B_{ij} = \varphi_{h(i, j)}^{-1}(B) \quad \text{e} \quad B'_{ij} = \varphi_{k(i, j)}^{-1}(B)$$

insieme m -riducibili a B .

DIM. Sia A tt -riducibile a B tramite la funzione totale ricorsiva $f(x) = \langle x_1, \dots, x_{e(x)+1}, \gamma_x \rangle$ dove abbiamo indicato con $e(x) + 1$ la norma di $f(x)$, e dove supponiamo, senza perdita di generalità, che per ogni x il polinomio γ_x sia in forma normale disgiuntiva.

Detto allora b un elemento di B ed a un elemento non appartenente a B , definiamo le seguenti funzioni totali ricorsive:

$$\varphi_{h(i,j)}(x) = \begin{cases} a & \text{se in } \gamma_x \text{ vi sono meno di } i+1 \text{ monomi;} \\ x_{j+1} & \text{se in } \gamma_x \text{ vi sono almeno } i+1 \text{ monomi, } j \leq e(x) \\ & \text{e nello } (i+1)\text{-esimo monomio la } (j+1)\text{-esima} \\ & \text{variabile compare non negata;} \\ b & \text{negli altri casi.} \end{cases}$$

$$\varphi_{k(i,j)}(x) = \begin{cases} b & \text{se in } \gamma_x \text{ vi sono meno di } i+1 \text{ monomi;} \\ x_{j+1} & \text{se in } \gamma_x \text{ vi sono almeno } i+1 \text{ monomi, } j \leq e(x) \\ & \text{e nello } (i+1)\text{-esimo monomio la } (j+1)\text{-esima} \\ & \text{variabile compare negata} \\ a & \text{negli altri casi.} \end{cases}$$

Detto allora $g(x) + 1$ il numero di monomi presenti in γ_x , e definiti gli insiemi B_{ij} e B'_{ij} come nell'enunciato del teorema, ci proponiamo di dimostrare che vale la (1).

A tale scopo osserviamo che se per un fissato $i \in \bigcap_{x=0}^{j=e(x)} B_{ij} - B'_{ij}$ deve essere $\varphi_{h(i,j)}(x) \in B$ e $\varphi_{k(i,j)}(x) \notin B \quad \forall j \leq e(x)$, pertanto in γ_x vi sono almeno $i+1$ monomi. Ma in tale caso per $j > e(x)$ risulta $\varphi_{h(i,j)}(x) = b$ e $\varphi_{k(i,j)}(x) = a$ e quindi $x \in B_{ij} - B'_{ij}$ per ogni j maggiore di $e(x)$. In definitiva posto $C_i = \bigcap_{j \in N} B_{ij} - B'_{ij}$ abbiamo dimostrato che:

$$C_i = \bigcap_{j \in N}^{e(x)} B_{ij} - B'_{ij}.$$

Sia ora $x \in \bigcup_{i \in N} C_i$, allora esiste i tale che:

$$x \in \bigcap_{j=0}^{j=e(x)} B_{ij} - B'_{ij}.$$

Esistono quindi in γ_x almeno $i+1$ monomi ed inoltre $\forall j \leq e(x)$ nel caso in cui nello $(i+1)$ -esimo monomio la $(j+1)$ -esima variabile compare non negata allora $\varphi_{h(i,j)}(x) = x_{j+1} \in B$, nel caso in cui compare negata $\varphi_{k(i,j)}(x) = x_{j+1} \notin B$. Detto allora γ_x^{i+1} lo $(i+1)$ -esimo monomio di γ_x risulterà

$$\gamma_x^{i+1}(C_B(x_1), \dots, C_B(x_{e(x)+1})) = 1.$$

e quindi, essendo soddisfatta la *tt*-condizione $f(x)$ da B , $x \in A$. Abbiamo pertanto dimostrato che $\bigcup_{i \in N} C_i \subseteq A$.

Sia viceversa $x \in A$, allora poiché B soddisfa la tt -condizione $f(x)$, deve esistere un indice $i + 1$ tale che $i + 1 \leq g(x) + 1$ ed inoltre $\gamma_x^{i+1}(C_B(x_1), \dots, C_B(x_{e(x)+1})) = 1$ ma è subito visto che ciò implica che $x \in C_i$, e che quindi $x \in \bigcup_{i=0}^{i=g(x)} C_i$. Utilizzando allora le condizioni $a')$ e $b')$ della definizione 1 risulta che:

$$A = \bigcup_{i \in N}^{g(x)} C_i.$$

e quindi la prima parte del teorema è dimostrata.

Sia per ipotesi A come nella (1), allora $x \in A$ se e solo se:

$$(2) \quad x \in \bigcup_{i=0}^{i=g(x)} \bigcap_{j=0}^{j=e(x)} B_{ij} - B'_{ij}$$

ma poiché

$$x \in B_{ij} \quad \text{se e solo se} \quad \varphi_{h(i,j)}(x) \in B$$

e

$$x \notin B'_{ij} \quad \text{se e solo se} \quad \varphi_{k(i,j)}(x) \notin B$$

è facile trovare una tt -condizione $f(x)$ soddisfatta da B se e solo se vale la (2). È possibile pertanto concludere che A è tt -riducibile a B .

2. Sarà utile per il seguito la seguente definizione:

DEFINIZIONE 3. Diremo che l'insieme A è un e -limite se esistono due funzioni totali ricorsive $f(x, n)$ ed $e(x)$ tali che:

$$a) \quad \forall x \quad x \in A \iff \lim_n f(x, n) = 1$$

$$b) \quad \forall x \quad |\{n / f(x, n) \neq f(x, n+1)\}| \leq e(x).$$

Allo scopo di caratterizzare gli e -limiti come insiemi tt -riducibili a K , premettiamo i seguenti semplici lemmi.

LEMMA 1. Esiste una funzione parziale ricorsiva $t(y, z)$ tale che se l'insieme A è la φ_y -intersezione della successione $(W_{\varphi_z(n)})_{n \in N}$, allora $A = W_{t(y,z)}$.

DIM. L'intersezione di un numero finito di insiemi r. e. è ancora un insieme r. e. il cui indice è funzione ricorsiva degli indici

di tali insiemi. Pertanto data una successione $(W_{\varphi_z(n)})_{n \in N}$ ed una funzione φ_y totale ricorsiva, esiste una funzione parziale ricorsiva $h(x, y, z)$ tale che:

$$\forall x, y, z \in N \quad \bigcap_{n=0}^{n=\varphi_y(x)} W_{\varphi_z(n)} = W_{h(x, y, z)}.$$

Se ora A è la φ_y -intersezione della successione $(W_{\varphi_z(n)})_{n \in N}$ allora

$$x \in A \iff x \in \bigcap_{n=0}^{n=\varphi_y(x)} W_{\varphi_z(n)} \iff x \in W_{h(x, y, z)} \iff \langle x, h(x, y, z) \rangle \in K^0.$$

Pertanto A è 1-riducibile a K ed è quindi possibile passare in modo uniforme effettivo dagli indici y e z ad un suo indice r. e. $t(y, z)$.

LEMMA 2. Esiste una funzione parziale ricorsiva $t'(y, z)$ tale che se l'insieme A è la φ_y -unione della successione

$$(W_{\varphi_z(n)})_{n \in N} \quad \text{allora} \quad A = W_{t'(y, z)}.$$

DIM. Ovvio.

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 2. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) l'insieme A è tt-riducibile a K ;
- b) $A = \bigcup_{n \in N}^{g(x)} W_{h(n)} - W_{k(n)}$ con $h(x)$, $k(x)$, e $g(x)$ opportune funzioni totali ricorsive;
- c) esiste una funzione totale ricorsiva $e(x)$ tale che A è un e -limite.

DIM. a) $\iff$ b). Riferendoci alla (1) del teorema 1 ed esaminando il modo come sono stati definiti gli insiemi B_{ij} e B'_{ij} , non è difficile dimostrare che:

$$\bigcap_{j \in N} B_{ij} = \bigcap_{j \in N}^{e(x)} B_{ij} \quad \text{e} \quad \bigcap_{j \in N} \bar{B}'_{ij} = \bigcap_{j \in N}^{e(x)} \bar{B}'_{ij}.$$

Pertanto la (1) può assumere la forma:

$$A = \bigcup_{i \in N}^{g(x)} \left[\bigcap_{j \in N}^{e(x)} B_{ij} \cap \left(\bigcap_{j \in N} \bar{B}'_{ij} \right) \right] = \bigcup_{i \in N}^{g(x)} \left[\bigcap_{j \in N} B_{ij} - \bigcup_{j \in N}^{e(x)} B'_{ij} \right].$$

Poiché nel nostro caso $B = K$, gli insiemi B_{ij} e B'_{ij} sono insiemi ricorsivamente numerabili i cui indici r. e. si possono ottenere in maniera effettiva uniforme a partire dagli indici i e j . Esisteranno cioè due funzioni totali ricorsive $r'(i, j)$ ed $s'(i, j)$ tali che:

$$B_{ij} = W_{r'(i, j)} \text{ e } B'_{ij} = W_{s'(i, j)}.$$

Posto allora per il teorema $s-m-n$ $r'(i, j) = \varphi_{r(i)}(j)$ e $s'(i, j) = \varphi_{s(i)}(j)$ con $r(i)$ ed $s(i)$ opportune funzioni totali ricorsive, detto m un indice r. e. di $e(x)$ e ricordando i lemmi 1 e 2, avremo che:

$$\bigcap_{j \in N}^{e(x)} B_{ij} = W_{t(r(i), m)} \text{ e } \bigcup_{j \in N}^{e(x)} B'_{ij} = W_{t'(s(i), m)}.$$

Ponendo allora $t(r(i), m) = h(i)$ e $t'(s(i), m) = k(i)$ la (1) assume la forma:

$$A = \bigcup_{i \in N}^{g(x)} W_{h(i)} - W_{k(i)}.$$

$b) \Rightarrow c)$. Indichiamo, seguendo le notazioni di Schönfield [4], con $W_z^{[n]}$ l'insieme degli elementi di W_z in cui l'algoritmo di indice z converge in meno di n passi. Supposta allora vera la $b)$, sia $f(x, n)$ la funzione totale ricorsiva così definita:

$$f(x, 0) = 0$$

$$f(x, n) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \bigcup_{m=0}^{m=g(x)} W_{h(m)}^{[n]} - W_{k(m)}^{[n]} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $x \in A$ allora esiste $m \leq g(x)$ tale che $x \in W_{h(m)} - W_{k(m)}$, detto allora n' il minimo intero n tale che $x \in W_{h(m)}^{[n]} - W_{k(m)}^{[n]}$ risulterà $f(x, n) = 1$ per ogni $n \geq n'$ e quindi $\lim_n f(x, n) = 1$. Supponiamo invece che $\lim_n f(x, n) = 0$, allora per ogni n maggiore di un opportuno n'

$$x \in \bigcup_{m=0}^{m=g(x)} W_{h(m)}^{[n]} - W_{k(m)}^{[n]}$$

e pertanto

$$x \in \bigcup_{m=0}^{m=g(x)} W_{h(m)} - W_{k(m)}$$

oppure equivalentemente $x \in A$. È evidente inoltre che

$$\forall x \mid \{n \mid f(x, n) \neq f(x, n+1)\} \mid \leq 2g(x)$$

e che quindi A è un e -limite.

$c) \Rightarrow b)$. Sia per ipotesi A un e -limite, esistano cioè due funzioni totali ricorsive $e(x)$ e $f(x, n)$ soddisfacenti le proprietà della definizione 3. Definiamo, seguendo Putnam [1], per ogni i le seguenti funzioni parziali ricorsive:

$$\varphi_{h(0)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } f(x, 0) = 1 \\ \text{div.} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\varphi_{h(i)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se esistono almeno } i \text{ interi } y_1, \dots, y_i \text{ tali che} \\ & f(x, y_j) \neq f(x, y_j + 1) \text{ } 1 \leq j \leq i \text{ e } f(x, y_i + 1) = 1 \\ & \text{dove } y_i \text{ si è supposto maggiore di tutti;} \\ \text{div.} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$\varphi_{k(i)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se esistono almeno } i+1 \text{ interi } y_1, \dots, y_{i+1} \text{ tali} \\ & \text{che } f(x, y_j) \neq f(x, y_j + 1) \text{ } 1 \leq j \leq i+1 \text{ ed} \\ & \text{inoltre, detto } y_{j+1} \text{ il maggiore di essi,} \\ & f(x, y_{i+1} + 1) = 0 \\ \text{div.} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Indicati come al solito con $W_{h(i)}$ e $W_{k(i)}$ rispettivamente i domini di $\varphi_{h(i)}$ e $\varphi_{k(i)}$, vogliamo dimostrare che A coincide con la e -unione della successione $(W_{h(m)} - W_{k(m)})_{m \in N}$. Infatti se $x \in \bigcup_{n \in N} W_{h(n)} - W_{k(n)}$ allora esiste n tale che $x \in W_{h(n)}$ e $x \notin W_{k(n)}$, e ciò significa che $f(x, n)$ presenta n variazioni l'ultima delle quali le fa assumere il valore 1 dopo di che non può assumere il valore zero. Essendo allora $\lim_n f(x, n) = 1$ x deve appartenere ad A , ed abbiamo pertanto dimostrato che $\bigcup_{n \in N} W_{h(n)} - W_{k(n)} \subseteq A$. Sia ora per ipotesi $x \in A$, allora essendo $\lim_n f(x, n) = 1$ detto i il numero di variazioni della successione $f(x, n)$, risulterà che $x \in W_{h(i)} - W_{k(i)}$

con $i \leq e(x)$. In definitiva, essendo verificate le condizioni $a')$ e $b')$ della definizione 3, l'asserto è dimostrato⁽¹⁾.

Dalla dimostrazione del teorema 2 risulta in modo ovvio che se l'insieme A è *btt*-riducibile a K allora le due funzioni totali ricorsive $g(x)$ ed $e(x)$ si riducono a due costanti e viceversa. Pertanto è possibile riottenere come immediato corollario di tale teorema una caratterizzazione degli insiemi *btt*-riducibili a K dovuta a Putnam [1].

COROLLARIO. Le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- a) l'insieme A è *btt* riducibile a K .
- b) A appartiene a Σ_1^* l'algebra di Boole generata dagli elementi di Σ_1
- c) A è un k trial limite.

Ai vari tipi di riducibilità a K considerati corrispondono dunque differenti tipi di limite e differenti caratterizzazioni algebriche e precisamente:

$$A \leq_T K \iff A \text{ è un limite} \iff A \text{ è in } \mathcal{A}_2$$

$$A \leq_u K \iff A \text{ è un } e\text{-limite} \iff \text{esistono } h, k \text{ e } g \text{ totali ricorsive:}$$

$$A = \bigcup_{n \in N}^{g(x)} W_{h(n)} - W_{k(n)}$$

$$A \leq_{out} K \iff A \text{ è un } k\text{-trial set} \iff A \text{ appartiene a } \Sigma_1^*.$$

Come Putnam osserva in [1] le caratterizzazioni in termini di limite possono riuscire particolarmente utili per individuare con maggiore esattezza il grado di decidibilità di un insieme. Ad esempio Loveland in [5] dopo aver dato una definizione di sequenza binaria casuale più restrittiva di quella ben nota di Church, definisce come casuale un insieme la cui sequenza caratteristica è tale e costruisce un insieme avente tale proprietà con una procedura al limite, concludendone pertanto che già in $\mathcal{A}_2$ esistono insiemi casuali nel senso da lui definito. D'altra parte egli dimostra che ogni

(1) L'equivalenza fra le proposizioni a) e c) del Teorema è stata indipendentemente dimostrata da H. . Carstens in « $\mathcal{A}_0^2$ -mengen » Tec. Rep. n. 17 Institut für Mathematik Technische Universität Hannover 1975.

insieme di Σ_1^* non può essere casuale, mentre dalla costruzione da lui effettuata si vede che l'insieme in questione è un ϵ -limite e quindi è tt -riducibile a K .

Analogamente da una delle equivalenti definizioni date da Magari [6] di insieme dialettico, si ricava che tali insiemi sono ϵ -limiti e quindi tt -riducibili a K .

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. PUTNAM, *Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski's*. J. Symbolic Logic 30 (1965) 48-57.
- [2] M. GOLD, *Limiting recursion*. J. Symbolic Logic 30 (1965) 28-47.
- [3] H. ROGERS JR., *Theory of recursive functions and effective computability*. McGraw Hill (1967).
- [4] SCHOENFIELD, *Degrees of unsolvability*. North Holland (1971).
- [5] D. W. LOVELAND, *The Kleene hierarchy classification of recursively random sequences*. Trans. Am. Math. Soc. (Dec. 1966).
- [6] R. MAGARI, *Su certe teorie non enumerabili*. (Sulle limitazioni dei sistemi formali I). Annali di Matematica pura e applicata, Bologna Serie IV Tomo XCVIII pp. 110-152.