ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2002/2003

I appello – 30 gennaio 2003

Esercizio 1. Sia B un campo e si consideri l'usuale spazio vettoriale

$$B^4 = \{(a,b,c,d)|a,b,c,d \in B\}$$

– Si verifichi che l'applicazione

$$\varphi : (a,b,c,d) \in B^4 \mapsto (a+3c, 4b+d) \in B^2$$

è un epimorfismo di B–spazi vettoriali. Si determinino il nucleo $Ker\varphi$ ed un suo supplementare.

– Si discuta, in funzione della caratteristica di B, la dimensione del sottospazio di B^4

$$W = \langle (6,2,0,3), (-4,0,1,6), (0,-6,-2,0), (3,4,1,0) \rangle$$

determinandone poi una base.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio

$$f(x) = 105x^6 + 70x^5 + 42x^4 + 30x^3 + 10x^2 + 21x + 105 \in Z_p[x].$$

– Si determini un campo di spezzamento K di $f(x)$ su Z_p in ciascuno dei seguenti casi: $p = 7$, $p = 5$, $p = 3$.

– Supposto $p = 2$, si provi che $f(x)$ è irriducibile in $Z_2[x]$. Si costruisca poi un campo di spezzamento K di $f(x)$ su Z_2, verificando in particolare che ha ordine 2^6. Infine si determini la struttura di $Gal(f(x)/Z_2)$ e si studi il reticolo dei sottocampi di K.