ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2003/2004

I appello – 12 febbraio 2004

Esercizio 1. Siano B un campo e $k(x)$ un polinomio non nullo di $B[x]$ di grado $n \geq 0$. Si giustifichi perchè l'applicazione

$$\phi : h(x) \in B[x] \to rest(h(x), k(x)) \in B[x]$$

è un endomorfismo dell'usuale B-spazio vettoriale $B[x]$, e si individuino, in funzione di n, i casi in cui ϕ è anche un endomorfismo dell'anello $B[x]$.

Si studi l'applicazione ϕ e, in particolare, se ne determini il nucleo $Ker\phi$, verificando che in ogni caso è un ideale dell'anello $B[x]$.

Si precisino la dimensione ed una base del B-spazio vettoriale $Im\phi$, individuandone un supplementare.

Supposto poi B finito di caratteristica $c \leq 7$ e posto $k(x) = 6x^2 + 10x + 31$, si studino in funzione di c l'anello quoziente $B[x]/Ker\phi$ e il B-spazio vettoriale $Im\phi$.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio

$$f(x) = 7x^5 + 15x^3 + 60x^2 + 30x + 8 \in Z_p[x].$$

In ciascuno dei seguenti casi:

$$p = 2; \;\; p = 5; \;\; p = 7; \;\; p = 3;$$

si determinino un campo di spezzamento K di $f(x)$ su Z_p, il grado $|K : Z_p|$, l'ordine, la struttura e gli elementi di un gruppo di Galois G di $f(x)$ su Z_p, il reticolo dei sottocampi di K.