ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2004/2005

I appello – 15 febbraio 2005

Esercizio 1. Siano B un campo e S uno spazio vettoriale su B di dimensione 4 e di base $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

(*) Riguardato B in modo canonico come spazio vettoriale su se stesso, si provi che l'applicazione

$$\psi : \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 \in S \to \alpha + \beta + \gamma + \delta \in B$$

è un omomorfismo tra gli spazi vettoriali S e B, e se ne determinino nucleo e immagine, precisandone la dimensione e una base.

(**) Si studino, in funzione della caratteristica di B, i sottospazi

$$W = \langle 2x_1 + x_3, x_2, 3x_3 \rangle \text{ e } U = \langle x_3 - x_1, 5x_4 \rangle$$

di S, precisandone una base e la dimensione. Si determini il valore di $carB$ per cui W e U sono supplementari.

(***) Considerato lo spazio vettoriale canonico B^2 su B, si dimostri che la posizione

$$\mu(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta x_4 + U) = (\alpha + \gamma, \beta)$$

definisce un'applicazione μ di S/U in B^2, che tale applicazione è un epimorfismo di spazi vettoriali, e di essa si descriva il nucleo.

Esercizio 2. Si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + 1 \in Z_3[x].$$

I) Si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $Z_3[x]$.

II) Posto $J = (f(x))$, delll'anello $Z_3[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

III) Si verifichi che un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a Z_3 ha ordine 9.

IV) Più in generale, si verifichi che in E ogni polinomio di II grado di $Z_3[x]$ ammette radici.

V) Esiste un primo p tale che il polinomio $x^4 + 1 \in Z_p[x]$ ammetta in di $Z_p[x]$ una decomposizione in fattori lineari?