Prova scritta di ALGEBRA II
A.A. 2005/2006
Prof.ssa Patrizia Longobardi

I APPELLO – 15 FEBBRAIO 2006

Esercizio 1. Sia F un campo e si consideri l' usuale F-spazio vettoriale

$$F^3 = \{(a, b, c)|a, b, c \in F\}.$$

– Si verifichi che l' applicazione $\varphi : (a, b, c) \in F^3 \to (a + b, b + 2c) \in F^2$ è un F-omomorfismo dello spazio vettoriale F^3 nello spazio vettoriale F^2 e se ne determinino il nucleo $Ker\varphi$ e limmagine $Im\varphi$, precisandone la dimensione ed una base.

– Si considerino i sottospazi

$$W = \langle(7, 9, 1), (1, 7, 3), (6, 0, 2)\rangle \text{ e } U = \langle(55, 77, 0), (110, 231, 0)\rangle.$$

Si determini la dimensione di ciascuno di essi, in funzione della caratteristica di F, e si precisi quando i due sottospazi sono tra loro supplementari.

– Supposto infine $carF = 3$, si provi che la posizione $\Phi((a, b, c) + U) = c$ definisce un'applicazione Φ di F^3/U in F , che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, e di essa si determini l' inversa.

Esercizio 2. Sia B un campo e si consideri il polinomio

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1 \in B[x].$$

Supposto $B = \mathbb{Z}_p$ e distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 7$,

(I) si decomponga $f(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(II) posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti ;

(III) si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l' ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una $\mathbb{Z}_p$ -base.

Si osservi poi che, qualunque sia il campo B, un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a B è sempre tale che $|E : B| \leq 2$. In particolare, nel caso $B = \mathbb{Q}$, si determinino di $f(x)$ il campo di spezzamento contenuto in $\mathbb{C}$ e le sue radici complesse.