ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2006/2007

I appello – 7 febbraio 2007

Esercizio 1. Siano F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a,b,c)|a,b,c \in F\}$.

- Si considerino i sottospazi $W = \langle (2,1,3), (1,-2,-1), (9,7,6) \rangle$ e $U = \langle (3,15,-3), (6,21,0) \rangle$. Si determini la dimensione di ciascuno di essi, in funzione della caratteristica di F, e si precisi quando i due sottospazi sono tra loro supplementari.
- Supposto infine $carF = 2$, si provi che la posizione $\Psi((a,b,c)+U) = a-c$ definisce un'applicazione Ψ di F^3/U in F, che tale applicazione è un isomorfismo di F-spazi vettoriali, e di essa si determini l'inversa.

Esercizio 2.

(I) Si determinino tutti i polinomi di $\mathbb{Z}_2[x]$ di II e III grado irriducibili in $\mathbb{Z}_2[x]$.

(II) Si considerino i polinomi $f(x) = x^7 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ e $g(x) = x^7 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

(a) Si dimostri che il polinomio $f(x)$ è irriducibile in $\mathbb{Z}_2[x]$.

(b) Si decomponga $g(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_2[x]$.

(c) Si determini un campo di spezzamento E di $f(x)$ rispetto a $\mathbb{Z}_2$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_2|$ ed una $\mathbb{Z}_2$-base.

(d) Si determini un campo di spezzamento K di $g(x)$ rispetto a $\mathbb{Z}_2$, precisandone l'ordine, il grado $|K : \mathbb{Z}_2|$ ed una $\mathbb{Z}_2$-base.

(e) Posti $J_1 = (f(x))$ e $J_2 = (g(x))$, si determinino, se esistono, l'inverso $h(x) + J_1$ di $g(x) + J_1$ in $\mathbb{Z}_2[x]/J_1$ e l'inverso $k(x) + J_2$ di $f(x) + J_2$ in $\mathbb{Z}_2[x]/J_2$.

(f) Si precisi se gli $\mathbb{Z}_2$-spazi vettoriali $\mathbb{Z}_2[x]/J_1$ e $\mathbb{Z}_2[x]/J_2$ sono isomorfi, e se lo sono gli anelli $\mathbb{Z}_2[x]/J_1$ e $\mathbb{Z}_2[x]/J_2$ (individuandone, eventualmente, un isomorfismo).

(g) Si determinino, se esistono, gli ideali massimali di $\mathbb{Z}_2[x]/J_1$ e $\mathbb{Z}_2[x]/J_2$.