ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2007/2008

I appello – 6 febbraio 2008

Esercizio 1. Siano F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a, b.c)|a, b, c \in F\}$.

Con $h \in F$ si considerino i vettori $v_1 = (1, h+1, 5)$, $v_2 = (4, 3, 0)$, $v_3 = (5h, 10h-5, 5h)$ ed il sottospazio $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ di F^3.

– Si discuta la dimensione di W in funzione di h e della caratteristica di F.

– Sempre in funzione di h e della caratteristica di F, si precisi quando esiste un F-omomorfismo ϕ di F^3 in F tale che $\phi(v_1) = 0$, $\phi(v_2) = 1$ e $\phi(v_3) = 1$.

– Supposto infine $h = 2$ e posto $U = \langle v_1, v_3 \rangle = \langle (1, 3, 5), (10, 15, 10) \rangle$, si provi che la posizione

$$\psi((a, b, c) + U) = 9a - 8b + 3c$$

definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F e che tale applicazione è un epimorfismo di F-spazi vettoriali. Si discuta poi quando è iniettiva e, in tal caso, se ne determini l'inversa.

Esercizio 2. Si considerino i polinomi

$$f(x) = 55x^5 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_p[x] \text{ e } g(x) = 55x^3 + x^2 + x + 4 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

(I) Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$, $p = 11$,

(i) si decompongano $f(x)$ e $g(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

(ii) si determini sia di $f(x)$ che di $g(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una $\mathbb{Z}_p$-base.

(iii) posto $J = (g(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2, 3, 5, 11\}$ il laterale $f(x) + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$ e, in almeno uno dei casi, si determini tale inverso.

(II) Supposto $p = 11$, si dica se gli anelli $\mathbb{Z}_{11}[x]/(f(x))$ e $\mathbb{Z}_{11}[x]/(g(x))$ sono isomorfi e, qualora lo siano, si costruisca un isomorfismo tra di essi.