ALGEBRA II

Prof.ssa Patrizia Longobardi

A.A. 2008/2009

I appello – 4 febbraio 2009

Esercizio 1. - Sia F un campo e si consideri l'usuale F-spazio vettoriale $F^3 = \{(a,b,c)|a,b,c \in F\}$. Con $h \in \mathbb{Z}$ e 1_F unità di F, si considerino i vettori $v_1 = (4,0,0)$ e $v_2 = (0,6,h1_F)$ ed il sottospazio $U = \langle v_1, v_2 \rangle$ di F^3 . In funzione di h e della caratteristica di F :

- si discuta la dimensione di U ;
- si precisi quando esiste un F-omomorfismo φ di F^3 in F tale che $\varphi(v_1) = 0$, $\varphi(v_2) = 1$;
- si precisi quando U è un sottoanello dell'anello F^3 e quando ne è un ideale. Supposto infine $h = 1$ e dunque $v_2 = (0,6,1)$, si verifichi quando la posizione $\psi((a,b,c) + U) = (5a, b - 6c)$ definisce un'applicazione ψ di F^3/U in F^2 ; in tal caso si provi che tale applicazione è un omomorfismo di F-spazi vettoriali. Si discuta poi quando è biettiva e, in tal caso, se ne determini l'inversa.

Esercizio 2. - Si considerino i polinomi

$$f(x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3 \in \mathbb{Z}_p[x] \quad \text{e} \quad g(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 2 \in \mathbb{Z}_p[x].$$

(I) Si determini, in funzione del primo p , il M.C.D. monico di $f(x)$ e $g(x)$.

Distinguendo i casi: $p = 2$, $p = 3$, $p = 5$,

(II) si studi l'anello quoziente $\mathbb{Z}_p[x]/(f(x), g(x))$, precisando in particolare in quali casi è principale;

(III) si decompongano $f(x)$ e $g(x)$ nel prodotto di fattori irriducibili di $\mathbb{Z}_p[x]$;

- si determini sia di $f(x)$ che di $g(x)$ un campo di spezzamento E rispetto a $\mathbb{Z}_p$, precisandone l'ordine, il grado $|E : \mathbb{Z}_p|$ e una $\mathbb{Z}_p$-base. In particolare si provi che o si giustifichi perchè nel caso $p = 3$ i polinomi $f(x)$ e $g(x)$ ammettono uno stesso campo di spezzamento su $\mathbb{Z}_3$. Si precisi infine se ci succede anche nel caso $p = 5$;
- posto $J = (g(x))$, si precisi per quali valori di $p \in \{2,3,5\}$ il laterale $f(x) + J$ è invertibile nell'anello $\mathbb{Z}_p[x]/J$.

(IV) Si dica se per qualche valore $p \in \{2,3,5\}$ gli anelli $\mathbb{Z}_p[x]/(f(x))$ e $\mathbb{Z}_p[x]/(g(x))$ sono isomorfi e, qualora lo siano, si costruisca un isomorfismo tra di essi.